ĐÀO VĂN TRUNG

Làm thế nào để học tốt
TOÁN PHỔ THÔNG

Người dịch : NGUYỄN VĂN MẬU



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC 1996

Cuốn sách này không thể đem lại cho bạn chiếc chìa khóa vạn năng để mở mọi cánh cửa, giải quyết mọi vấn đề, nhưng chắc chắn sẽ đem lại cho bạn nhiều ví dụ để bắt chước và cơ hội để rèn luyện.

... Không ai lên được sao Bắc Đẩu, nhưng cứ hướng theo nó chắc chắn người ta sẽ tìm đúng hướng đi chính xác.

G. Polia (Mỹ)

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Nói đến học toán, thường người ta nghĩ ngay đến các con số, các ký hiệu, dấu toán, hình vẽ và các mối quan hệ nhằng nhịt giữa chúng. Quả đúng thế, vì đây là môn khoa học trừu tượng. Chính vì nó rất trừu tượng nên phạm vi ứng dụng càng rộng rãi. Ngày nay toán học đã thâm nhập vào mọi lĩnh vực hoạt động của con người. Vì nó vô cùng quan trọng cho nên luôn là môn học cơ sở chủ yếu ở cấp phổ thông.

Làm thế nào để học toán tốt ? Đương nhiên, trước hết phải rất cần cù, nỗ lực phấn đấu, đó là điều kiện tất yếu để học tốt bài. Ngoài ra còn phải tìm phương pháp, phải căn cứ đặc điểm từng môn mà học, chỉ có như vậy mới đạt hiệu quả học tập cao. Phương pháp hay có thể bỏ sức ít mà kết quả cao, nếu không sẽ ngược lại. Nhà sinh lý học Pháp - Penna có nói : "Phương pháp học tốt giúp ta phát huy được tài năng vốn có ; phương pháp học dở sẽ cản trở phát triển tài năng". Do đó, học tập một cách khoa học là vô cùng quan trọng.

Những vấn đề được đề cập đến trong cuốn sách này đại thể chia làm hai loại. Thứ nhất là phương pháp học toán trên lớp thông thường của học sinh trung học ; thứ hai là phương pháp học môn toán phổ thông. Hai nội dung này vừa liên quan, vừa độc lập với nhau. Độc giả có thể tùy nhu cầu của mình để đọc cả hay chọn từng phần. Để đáp ứng nhu cầu khác nhau của học sinh cấp hai và cấp ba, các ví dụ đưa ra trong sách đều có đủ cho cả các lớp.

Ngoài ra, vì đây là cuốn sách giới thiệu phương pháp học toán cho nên có vấn đề về phương pháp đọc cuốn sách này. Đề nghị độc giả khi đọc : thứ nhất phải vừa đọc vừa suy nghĩ, cố gắng hiểu được điểm chính của từng mục ; thứ hai phải liên hệ với thực tế học tập để tìm ra cách cải tiến phương pháp học toán của mình.

Hy vọng cuốn sách sẽ trở thành bạn thân của bạn, sẽ sát cánh bên bạn suốt cả quá trình học toán ở phổ thông.

3 - 9 - 1992
TÁC GIẢ

1 - CHUẨN BỊ BÀI TRƯỚC LÚC LÊN LỚP

Chuẩn bị bài trước lúc lên lớp đối với học tốt môn toán có thật có tác dụng không ?

Chúng tôi đã từng điều tra tình hình chuẩn bị bài trước lúc lên lớp môn toán của học sinh năm thứ hai (như học sinh lớp bảy của V.N) ở một trường PTCS trọng điểm của Bắc Kinh. Kết quả là : lớp có 50 học sinh, lần nào cũng chuẩn bị trước chỉ có 2 học sinh, thường chuẩn bị bài trước có 11 học sinh. Phân tích thành tích học toán của những học sinh thường chuẩn bị bài so với học sinh không chuẩn bị bài nói chung cao hơn 10 điểm (ở đây tính theo bậc điểm 100. N.D.), sự chênh lệch rất rõ. Điều đó chứng tỏ chuẩn bị bài trước đối với học tốt môn toán rất có tác dụng.

Vì sao lại thế ? Nguyên nhân rất đơn giản, thứ nhất, chuẩn bị bài trước giúp ta làm quen với kiến thức mới, hiểu được nó. Quy luật nhận thức của con người không phải một lần là xong mà phải trải qua từ không biết đến biết, từ ngoài vào trong. Chuẩn bị bài trước, lúc được nghe thầy giảng cũng tức là lần thứ hai học lại kiến thức đó. Qua chuẩn bị bài, anh đã có sự hiểu biết sơ bộ về kiến thức mới, lúc nghe giảng sẽ đỡ khó khăn, hiểu nó dễ dàng hơn. Thứ hai, qua chuẩn bị bài, giúp ta xác định được các điểm cần chú ý lúc nghe giảng. Trong quá trình chuẩn bị, thường gặp những vấn đề khó. Những chỗ khó này chính là trọng điểm để chú ý lúc nghe giảng. Chuẩn bị bài trước, lúc nghe giảng trong lòng đã "có vốn", lúc thầy giáo vừa gợi ý là mình đã "linh tính được vấn đề". Thứ ba, chuẩn bị bài trước có thể bồi dưỡng khả năng tự học, xây dựng thói quan chủ động trong học tập. Trung Quốc có câu "Sư bác dẫn vào cửa, còn tu hành là ở ta", tức là

nói thành tích học tập của mỗi người là tùy thuộc vào sự nỗ lực phấn đấu và cách thức học tập của người đó quyết định. Chúng ta không những sẽ cố gắng sau khi được thầy dẫn dắt mà còn phải chuẩn bị trước khi thầy dẫn dắt.

Vậy phải chuẩn bị bài học toán như thế nào ?

1. Đọc qua toàn bài, xác định rõ nội dung chính

Đặc điểm sách giáo khoa môn toán ở trung học là mỗi tiết đều có các khái niệm, định lý, công thức, quy tắc, ví dụ và các bài tập. Chuẩn bị bài, trước hết là phân biệt rõ trong tiết đó có những khái niệm, định lý, công thức và quy tắc mới nào. Như vậy làm cho ta làm quen bước đầu với các kiến thức đó. Nói chung, trong một tiết, các khái niệm, định lý... mới không nhiều và những chỗ đó đều được in đậm hoặc đóng khung nên rất dễ phân biệt.

Ví dụ : Nội dung tiết khai căn khá nhiều, đại thể có :

- Các khái niệm : 1) Căn bậc hai. 2) Các phép tính căn bậc hai. 3) Khai căn bậc hai.

- Định lý : Tính chất căn bậc hai.

- Quy tắc : Quy tắc tìm căn bậc hai.

Sau khi đã nắm được đại thể các nội dung, cần xem đi xem lại, vừa đọc vừa suy nghĩ. Ví dụ định nghĩa của căn bậc hai : "nếu có $x^2 = a$ thì ta gọi căn bậc hai của a là x". Điều đó nói lên khái niệm căn bậc hai được xây dựng trên cơ sở phép tính bình phương, x thực chất là cơ số của lũy thừa x^2. Như vậy là đã sơ bộ hiểu phép tính căn.

2. Tìm trọng điểm, ghi lại những chỗ khó hoặc chưa hiểu

Trong một tiết, thường có một số kiến thức chính, chúng được ứng dụng rộng rãi, thường gặp trong các ví dụ và bài tập. Đó sẽ là những trọng điểm. Lúc chuẩn bị bài, phải tìm ra nó, có thể ban

đầu tìm chưa chuẩn xác, nhưng không hề gì, sẽ được uốn nắn lại khi nghe thầy giảng. Điều quan trọng là luôn rút kinh nghiệm, chắc sẽ ngày càng đúng nhiều hơn.

Trong chuẩn bị bài, đối với những chỗ chưa hiểu có thể tạm thời bỏ qua, đọc tiếp phần sau, đọc xong quay về đọc lại. Nếu vẫn không hiểu thì đành ghi lại, chờ lúc nghe thầy giảng sẽ giải quyết. Cách làm đó thường được gọi là "tồn nghi".

Tìm được trọng điểm, đánh dấu những "chỗ tồn nghi" thì sẽ xác định được những chỗ cần tập trung nghe giảng, tức là nghe có mục đích, hiệu suất sẽ cao.

3. Kết hợp tay và đầu, làm một ít bài tập

Học toán không thể không làm bài tập. Muốn hiểu và nắm vững các kiến thức toán học, khi chuẩn bị bài, ngoài đọc và nghĩ ra, còn cần bắt tay vào tính toán, thử tự giải những ví dụ trong sách. Nếu có thời gian có thể làm thêm một số bài tập nào đó. Lúc làm bài tập nhất định bạn sẽ có những lĩnh hội giúp hiểu sâu hơn các kiến thức mới.

4. Ghi chép

Lúc chuẩn bị bài, đại não luôn ở trạng thái tư duy, trong quá trình hiểu bài mới thường lóe lên những ý nghĩ nào đấy, cũng tức là những điều tâm đắc. Đó chính là những tín hiệu mới nảy nở ra do kết quả của đào sâu suy nghĩ, nó vụt hiện vụt tắt, hiệu ứng tức thời, phải tóm ngay lấy nó, ghi vào vở. Cứ làm đều như thế nhất định sẽ nâng cao hiệu suất.

Trên đây giới thiệu bốn việc cần làm trong chuẩn bị bài, là bốn khâu giúp ta đi từ ngoài vào trong, đi sâu dần vào nội dung bài học. Tất nhiên sẽ mất một số thời gian. Do điều kiện khác nhau, nên lúc chuẩn bị bài không nhất thiết phải làm đủ cả bốn khâu. Nói chung, nên chuẩn bị bao lâu và học những nội dung gì phải tùy hoàn cảnh cụ thể lúc đó mà quyết định. Gặp lúc thời gian ít, chỉ đọc qua một lần bài mới cũng được, nếu rỗi hơn, có thể đọc thêm phần tham khảo để mở rộng luồng suy nghĩ, hiểu được sâu hơn.

2 - NÂNG CAO HIỆU SUẤT NGHE GIẢNG

Lên lớp là con đường chủ yếu để học sinh nhận được kiến thức. Nghe giảng tốt hay không, điều đó trực tiếp ảnh hưởng đến mức độ hiểu và nắm vững các kiến thức mới.

Làm thế nào để nâng cao hiệu suất nghe giảng toán ?

1. Tập trung cao độ sự chú ý

Rất nhiều học sinh giỏi toán, khi hỏi đến nghe giảng bài ra sao, họ đều nêu ra kinh nghiệm cơ bản nhất là tập trung cao độ sức chú ý. Qua nghiên cứu thấy rõ, có tập trung chú ý nghe giảng hay không ảnh hưởng rất lớn đến thành tích học tập. Muốn tập trung cao độ sức chú ý, trước hết phải làm rõ chú ý vào cái gì, tức là làm rõ mục tiêu cần chú ý. Khi nghe giảng, mục tiêu chú ý của ta nên nhất trí với mục tiêu giảng của thầy. Nếu gặp chỗ nghe không hiểu, cũng không nên nghĩ mãi về điều đó, nếu không sẽ ảnh hưởng kết quả nghe phần sau. Tất nhiên, bảo đảm nhất trí với mục tiêu thầy giảng không có nghĩa là yêu cầu ta theo sát thầy từng bước, bị động nghe giảng mà phải luôn suy nghĩ, động não quanh những vấn đề thầy giảng, từ các góc độ, bình diện khác nhau để suy nghĩ, khiến mình từng bước tham gia sâu vào những tư duy toán học do thầy dẫn dắt. Mặt khác, sự tập trung chú ý phải có trọng điểm. Trọng điểm cần chú ý cũng là trọng điểm nghe giảng. Nói chung, trọng điểm nghe giảng bao gồm : kiến thức trọng điểm, các chỗ khó và phương pháp giải quyết vấn đề. Trong việc học tập các khái niệm, cần đặc biệt chú ý thầy giáo đã đưa khái niệm mới vào như thế nào và thầy đã phân tích các tính chất đặc trưng của khái niệm mới ra sao. Đối với công thức, quy tắc, định lý thì cần lắng nghe con đường suy nghĩ mà thầy phân

tích, chứng minh và cách vận dụng nó để giải bài tập chứ không nên bằng lòng, thỏa mãn ở mức hiểu và nhớ được các kết luận.

2. Suy nghĩ đoán trước

Nói chung, trong lớp, phần lớn nội dung nghe hiểu được. Do đó vấn đề đặt ra là : sau khi đã hiểu, nên nghe giảng như thế nào ? Chúng tôi đã tìm hiểu cách làm của học sinh lớp tám (tương đương với lớp bảy ở VN. N.D), qua thống kê thấy rõ : 10% không muốn nghe nữa hoặc làm việc khác, hoặc ngồi im ; 62% vẫn nghe như bình thường ; 8% thỉnh thoảng có suy nghĩ những nội dung thầy giảng ; 20% học sinh luôn suy nghĩ đến nội dung thầy giảng. Từ đó thấy rõ, đa số học sinh nghe hiểu xong đã không động não nữa, hoạt động tư duy dừng lại. Như vậy làm sao có thể bắt mình trong lúc lên lớp phải luôn động não để nảy ra những ý nghĩ mới ? Vị học giả Mỹ, ngài Hai-ao-khơ nói : "Khi anh nghe giảng hay đọc sách, nên thử đoán xem phía dưới sắp nói cái gì, có lúc đoán đúng, có lúc sai, nhưng nếu cứ kiên trì tiếp tục thì nhất định sẽ được bù lại một cách rất xứng đáng". Em Lý Hạo lớp Thiếu nhi trường phổ thông số 8 Bắc Kinh hiểu điều này rất rõ. Trong những ghi chép tổng kết "học toán như thế nào" em viết : "Theo tôi, suy nghĩ là khâu quan trọng nhất trong nghe giảng trên lớp. Nghe xong lời giảng của thầy giáo là lập tức suy nghĩ, suy nghĩ bám sát lời thầy giảng, phân tích, lý giải nhanh lời thầy vừa giảng, cố gắng hiểu thật nhanh ý của thầy, từ đó mà liên kết hiểu nội dung toàn tiết. Hiểu được điều thầy vừa giảng, rõ được điều thầy đang giảng, đoán biết được những điều thầy sắp giảng, như vậy nội dung toàn bài giảng sẽ giữ lại những ấn tượng sâu sắc trong đầu". Nghe giảng với ý thức chắt chiu từng phút, luôn đón ý thầy, luôn tích cực động não tìm tòi, cái đó gọi là suy nghĩ đón trước.

Ví dụ thầy giáo giảng "vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x + 2$". Thầy vừa đọc xong đề, chưa hỏi dùng cách gì để vẽ, có học sinh đã đoán thầy sẽ dùng phương pháp lập bảng xác định điểm để vẽ đồ thị, khi thầy vừa nêu lên dùng phương pháp đó thì anh ta lại nghĩ nên biến đổi $x^2 - 2x + 2$ thành biểu thức bình phương, lấy

hoành độ điểm đỉnh x = 1, hai bên đỉnh lấy những giá trị hoành có khoảng cách như nhau, và thế là anh ta cầm bút vẽ. Tiếp sau đó anh ta lại nghĩ, nói chung đối với hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) nên dùng phương pháp lập bảng vẽ đồ thị. Cách suy nghĩ đón trước này thực chất là quá trình học sinh chủ động thăm dò, phát hiện và nắm vững các kiến thức mới.

Trong lúc suy nghĩ đón trước, nếu gặp chỗ không thống nhất với thầy giảng thì phải quay về chỗ phân tích của thầy, lý giải lời giảng của thầy, cố gắng nhanh chóng tìm ra chỗ nào mình suy nghĩ không thỏa đáng ? Như vậy sẽ nâng cao hơn sự hiểu biết về kiến thức mới.

3. Luôn luôn thăm dò

Trong lúc nghe giảng, nếu phát hiện hoặc tìm được cách giải nào đó thì không được dừng lại, thỏa mãn mà phải tiếp tục đi sâu vào cách mới đó. Hơn nữa khi nảy ra một cách suy nghĩ mới thì bản thân cũng chưa chắc đã hiểu ngay được nguyên lý của nó là gì. Do đó, ngàn lần không được tự mãn, phải không ngừng thăm dò, tiến thêm lên. Lên lớp học toán không chỉ thầy giảng, học sinh nghe mà thực tế thầy chỉ là người dẫn dắt, chỉ đạo và tổ chức, còn học sinh mới là người làm chủ trong học tập. Chỉ cần anh luôn nắm bắt cách giải quyết, không ngừng khám phá, lóe sáng trong tư duy thì nhạy cảm sẽ tăng lên.

4. Ghi chép đầy đủ, cẩn thận

Ghi chép tốt là khâu không thể thiếu để nâng cao hiệu suất nghe giảng. Ghi chép bài tốt sẽ giúp ích rất nhiều cho ôn tập. Dưới đây thử bàn thế nào gọi là ghi chép tốt.

Chọn vấn đề chính, ghi tóm tắt. Ghi lại nội dung của các đề mục thầy đã giảng, để khi học bài hiểu được những kiến thức hoàn chỉnh của bài. Đồng thời trong mỗi mục, ghi lại những lời giảng độc đáo của thầy đối với các khái niệm, định lý và những lĩnh hội của mình, ghi lại những điều mấu chốt trong phân tích và giải các ví dụ.

Ghi những ý kiến mới của bạn khác. Kịp thời ghi lại cách giải bài kiểu khác hoặc những ý kiến giải thích độc đáo của bạn mình, chờ lúc học bài sẽ suy ngẫm thêm để biến thành kiến thức của mình. Đối với những ý kiến sai điển hình cũng nên ghi lại để mà cảnh giác.

Ghi lại những linh cảm trong lúc nghe giảng. Trong lúc nghe giảng, tập trung chú ý cao độ, đại não ở trạng thái tư duy căng thẳng thường đột nhiên lóe lên những ý nghĩ mới. Nó có thể là một sự lĩnh hội mới, cũng có thể do đào sâu mà nảy ra một câu hỏi mới, đó chính là linh cảm. Linh cảm là một ý niệm được bừng lên sau khi người đó đã hiểu khá sâu đối với vấn đề. Nó vụt hiện vụt tắt, vì vậy phải thành thạo nắm bắt nó, kịp thời ghi lại. Nhưng cũng phải chú ý không được bỏ dở nghe giảng để đi tìm kiếm các "linh cảm", vì như thế sẽ ảnh hưởng hiệu suất nghe giảng. Những vấn đề chưa được giải quyết đều nên gác lại chờ đến khi học bài giải quyết.

Ghi những chỗ khó hoặc còn nghi ngờ. Nghe giảng gặp chỗ chưa hiểu không nên cứ bám mãi không buông tha, mà phải đánh dấu lại, chờ giải quyết sau.

Ngoài ra còn cần ghi những nội dung thầy giảng thêm hoặc những nội dung mà mình cho là quan trọng.

Tóm lại phải biến vở ghi thành tài liệu bổ sung cho sách học. Chỉ có như vậy vở ghi mới trở thành trợ thủ của bạn trong học toán.

Cần chú ý giải quyết tốt giữa nghe và ghi. Vì thói quen mỗi người khác nhau nên ghi ít hay nhiều là tùy từng người. Nguyên tắc chung lấy nghe làm chính, ghi là phụ. Ghi nhiều hay ít phải lấy không gây ảnh hưởng nghe làm chuẩn. Nếu vì ghi mà ảnh hưởng nghe thì đừng ghi, chỗ thiếu đó sau khi nghe giảng có thể mượn vở bạn bổ sung vào.

3 - HỌC BÀI MÔN TOÁN NHƯ THẾ NÀO

Học bài là khâu quan trọng để học toán tốt. Trong học toán, chúng tôi phát hiện có nhiều học sinh không coi trọng ôn tập. Lên

lớp về là vội làm bài tập. Kết quả người khác chỉ làm bài tập mất nửa giờ thì anh ta phải mất gấp đôi, lại còn sai sót hoặc không chặt chẽ.

Vì sao lại nêu lên về nhà phải học bài ? Đó là vì :

Thứ nhất, ôn tập giúp duy trì và tăng thêm trí nhớ. Người ta muốn nắm vững kiến thức phải trải qua ba giai đoạn : tiếp thu, hiểu nhớ và vận dụng, trong đó hiểu và nhớ là mấu chốt để vận dụng. Công trình nghiên cứu của giáo sư Sungyuan ở đại học Zhupo Nhật Bản chỉ rõ : "100% nội dung học ở trên lớp, nếu về nhà không ôn tập, qua một ngày chỉ còn lại 60%, đến ngày thứ ba thì chỉ còn 30%". Do đó, không kịp thời ôn tập thì không thể duy trì trí nhớ được, cũng tức là sẽ ảnh hưởng đến việc nắm vững và vận dụng kiến thức. Ngược lại, nếu kịp thời ôn tập sẽ đỡ bị quên. Qua ôn tập, đại não sẽ được thông tin kích thích mạnh hơn, hiểu sâu hơn về kiến thức mới làm cho trí nhớ được tăng cường.

Thứ hai, ôn tập có thể nẩy ra nhận thức mới. Xa xưa từ hơn 2000 năm trước, nhà giáo dục cổ đại Trung Quốc, Khổng Tử đã căn dặn học sinh "ôn cũ biết mới". Tức là nói thông qua ôn tập không những thuộc lòng những kiến thức đã học mà từ trong đó còn có thể nảy ra những nhận thức mới.

Nhận thức mới đó có thể là kiến thức mới, hiểu biết mới hoặc phát hiện mới, v.v...

Ôn toán có thể chia thành : ôn tập thông thường, ôn tập theo từng phần, ôn tập theo giai đoạn và tổng ôn tập. Phạm vi của nó từ nhỏ đến to, phương pháp ôn tập do đó cũng có khác.

Dưới đây thử bàn về ôn tập thông thường.

Ôn tập thông thường là ôn tập sau mỗi buổi học ở lớp. Đặc điểm của nó là kịp thời, tiết kiệm thời gian. Ôn tập thông thường có thể có bốn cách : ôn trước khi làm bài tập ; sau khi làm bài tập ; vừa làm bài tập, vừa ôn ; ôn trước khi lên lớp bài mới. Trong mấy cách này, cách ôn trước khi làm bài tập là tốt nhất.

Ôn trước khi làm bài tập, nhưng với cách "trước hết nhớ lại, sau đó đọc sách" đạt hiệu quả tốt nhất. Tức là trước hết hồi tưởng lại những nội dung thầy đã giảng trên lớp, sau đó mới đối chiếu sách hoặc vở ghi để xem đã ghi đủ, ghi đúng các nội dung chính chưa, các điểm chính của các khái niệm hiểu có chính xác không, v.v... Những chỗ quên cần xem lại sách hoặc vở ghi cho kỹ. Cách ôn bài "bắn tên có đích" đó để lại ấn tượng rất sâu. Có học sinh đã nói về điều đó như sau : "Cần hồi tưởng trước, đọc sách sau, chỉ có thế tư duy mới tập trung cao độ, khiến ta đắm mình trong sáng tạo".

Khi ôn tập toán cần chú ý kết hợp đầu và tay. Giáo sư Tô Bộ Thanh đã từng phê bình một học sinh trong nửa tháng đọc xong cuốn "giáo trình hình học vi phân" như sau : "Đọc toán không như xem tiểu thuyết. Không bắt tay viết thì đầu hiểu sao được ?". Kết hợp đầu và tay tức là vừa đọc vừa viết. Ví dụ khi đọc các chứng minh định lý, diễn toán các công thức hay quy tắc, lời giải của ví dụ đều cần phải viết ra, xem có biết giải không, giải đúng hay sai, có vấn đề gì không ?

Những điều trên lớp chưa nghe hiểu, trong ôn bài nhất định phải làm cho hiểu. Phải xem kỹ sách và vở, lật đi lật lại vấn đề, nếu có điều kiện thì đọc thêm sách tham khảo. Cuối cùng quả thật vẫn chưa hiểu thì phải hỏi bạn hay thầy.

Ngoài ôn tập thông thường cho tốt, còn phải ôn tập tốt từng phần, từng giai đoạn và cả tổng ôn tập. Các hình thức ôn tập cũng rất có ích để hiểu và nắm vững một cách toàn diện, hệ thống kiến thức từng phần. Từ đó mà xây dựng kiến thức hoàn chỉnh, đặt nền tảng vững chắc cho giai đoạn học tập tiếp theo.

Làm thế nào để ôn tập từng phần, giai đoạn và tổng ôn tập tốt ? Muốn thế cần làm hai việc sau. Thứ nhất, phải chỉnh lý kiến thức thành hệ thống (bao gồm cả khái niệm và phương pháp), phải viết thành các tiểu kết. Thứ hai, phải chú trọng luyện tập kỹ năng đạt đến thành thạo, khéo léo. Trong khâu làm bài tập, nhiều học

sinh thường bỏ qua những bài trong sách giáo khoa, đi tìm bài tập sách khác làm, làm như thế là không tốt.

Cần biết rằng, các bài tập trong sách giáo khoa là được tuyển chọn theo chương trình, nó thể hiện yêu cầu cụ thể đối với các nội dung của chương trình, do đó ôn tập bài tập trước hết phải làm các bài trong sách giáo khoa, trên cơ sở đó mới làm thêm một số đề khó ở ngoài. Hoàn toàn không nên đảo lộn thứ tự trong và ngoài chương trình.

4 - LÀM TỐT CÁC TIỂU KẾT

Học xong một phần (hoặc chương) nên kịp thời hệ thống lại các khái niệm, chỉnh lý, phân loại từng phần kiến thức, khiến nó gắn lại với nhau. Như vậy ta sẽ hiểu được các khái niệm một cách hoàn chỉnh và mối tương quan giữa chúng, phân loại, sắp xếp, đó gọi là tiểu kết. Làm tốt tiểu kết sẽ cảm thấy sách càng đọc càng mỏng, mà năng lực ngày càng cao.

Nói chung có hai loại tiểu kết, một loại là chỉnh lý sắp xếp lại toàn bộ kiến thức, loại thứ hai là chỉnh lý theo chuyên đề.

Chỉnh lý toàn bộ bao gồm hai nội dung là các khái niệm và phương pháp toán học. Chỉnh lý các khái niệm toán học trước hết là nắm cho được mối quan hệ logic giữa các khái niệm, làm cho các khái niệm học phân tán trước đây trở thành hệ thống, thành kiến thức riêng của mình. Thường dùng hình cây để liên kết các khái niệm của một phần lại với nhau.

Dưới đây cử vài ví dụ.

1. Sau phần hình học hai đường thẳng giao nhau, ta sẽ tiểu kết phần hệ thống các khái niệm về góc như sau :

Định nghĩa góc:

- So sánh góc → Đo góc
- Phân loại góc
  - + Góc nhọn, góc vuông, góc tù
  - + Góc bẹt, góc đầy
- Phép tính góc (cộng, trừ, nhân, chia) → chia đều góc
- Quan hệ giữa hai góc
  - Quan hệ vị trí
    - + Góc đối đỉnh
    - + Góc kề
    - + Góc đồng vị, góc so le trong, góc trong cùng phía
  - Quan hệ to, nhỏ
    - + Góc bù của nhau → Tính chất góc bù
    - + Góc phụ của nhau → Tính chất góc phụ

Ví dụ trên đây là để nói rõ mối liên hệ logic giữa các khái niệm về góc. Khi tổng kết, có thể viết chi tiết hơn. Ví dụ viết định nghĩa của các góc, vẽ hình, nêu lên các điểm giống và khác nhau giữa các khái niệm, v.v...

Tổng kết phương pháp toán học phải kết hợp qui nạp, chỉnh lý các loại bài tập của phần đó. Điều đó đòi hỏi phải công phu. Nếu hàng ngày chú ý tích lũy từng tí thì hiệu quả sẽ được nâng cao.

Dưới đây nêu một ví dụ.

Tổng kết phương pháp giải phương trình mũ và phương trình log

Phương trình mũ:

- Có thể biến thành $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
  $a > 0$, $(a \neq 1)$
- $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a = g(x)\lg b$
  $(a, b > 0,\ a \neq 1, b \neq 1$
  $a \neq b$

Điểm chính của phương pháp: căn cứ tính chất đơn điệu của hàm mũ biến đổi thành phương trình đại số.

Phương trình log:

- Biến đổi thành $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

- $\log_{g(x)} f(x) = C$ (C là hằng số $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \text{ và } g(x) \neq 1 \\ f(x) = [g(x)]^C \end{cases}$

Điểm chính của phương pháp : Căn cứ tính chất đơn điệu và khoảng xác định của hàm số log, biến đổi thành phương trình đại số đồng giá trị (gồm cả nhóm điều kiện bất đẳng thức).

5 - HIỂU CÁC KÍ HIỆU TOÁN NHƯ THẾ NÀO

Mở sách giáo khoa cấp hai ra, hiện rõ trước mắt ta ngoài phần chữ và hình còn có đủ các loại kí hiệu toán. Tuy ở cấp một bạn đã làm quen với "+, −, ×, ÷" nhưng đó chỉ là những kí hiệu đơn giản. Lên trung học, bạn ngày càng gặp nhiều kí hiệu toán học. Làm thế nào để làm quen với nó ? Có thể bắt đầu từ đầu mối nào không ? Dưới đây bàn về các câu hỏi đó.

Kí hiệu toán học là phương thức để diễn đạt khái niệm, nó đơn giản và rõ ràng, dùng thuận tiện, là loại văn tự thông dụng của thế giới toán học. Các kí hiệu toán học đã ra đời và phát triển qua một quá trình lịch sử lâu dài. Sự phát triển và hoàn thiện nó có tác dụng thúc đẩy nhất định đối với sự phát triển toán học.

Các kí hiệu toán có thể chia làm hai nhóm lớn.

Thứ nhất là nhóm ký hiệu các khái niệm toán được quy định thống nhất. Có thể gồm ba loại.

1. Ký hiệu phép tính

Ngoài ký hiệu bốn phép tính cộng, trừ nhân, chia đã nói ở trên còn có ký hiệu phép khai căn "$\sqrt{\ }$" (căn bậc hai), "$\sqrt[n]{\ }$" (căn bậc n), ký hiệu phép lũy thừa, "a^n", "a^{-n}", "$a^{\frac{m}{n}}$", "$a^{-\frac{m}{n}}$" (trong đó m, n là số nguyên dương), kí hiệu phép tính log "$\log_a N$" (trong đó a > 0 và a ≠ 1, N > 0), v.v...

2. Kí hiệu quan hệ

Ký hiệu quan hệ số lượng : lớn hơn ">", bằng "=", nhỏ hơn "<", khác với "≠", lớn hơn hoặc bằng "⩾", nhỏ hơn hoặc bằng "⩽", v.v...

Kí hiệu quan hệ hình dạng : đồng dạng "~", bằng hoặc gần bằng "≃", vuông góc "⊥", song song "//".

Kí hiệu quan hệ tổ hợp : ngoặc đơn "()", ngoặc kép "[]" ngoặc nhọn "{}".

Kí hiệu quan hệ logic : Vì "∵", cho nên "∴", suy ra "⇒", tương đương "⇔"

3. Kí hiệu tên gọi

Kí hiệu tên gọi đại số : trị số tuyệt đối của a "$|a|$", a là số dương "a > 0", căn bậc hai của x không âm "$\pm\sqrt{x}$ (x ⩾ 0)", a mũ n "a^n", biệt thức nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn số "Δ", dấu dương "+", dấu âm "–", tập số tự nhiên "N", tập số thực "R", tập số phức "C" .v.v..

Kí hiệu tên gọi hình học : góc "<" hoặc "∧" (ví dụ ∠ AOB hoặc $\widehat{AOB}$), đường tròn "◯ ", đường tròn tâm O "◯ O", đường tròn tâm O bán kính r "◯ (O, r)", góc vuông "Rt ∠", tam giác "Δ", hình bình hành " ▱ "

Kí hiệu lượng giác : sin góc α "sinα", cosin góc α "cosα" tang góc α "tgα, cotg góc α "ctgα", v.v...

Đối với các loại kí hiệu khái niệm toán học, đều phải hiểu rõ nghĩa của chúng. Khi nhớ và hiểu các kí hiệu biểu thị khái niệm cần chú ý phân biệt các ký hiệu có hình dạng giống nhau nhưng ý nghĩa khác nhau. Ví dụ kí hiệu lớn hơn "$>$" và nhỏ hơn "$<$". Khi biểu thị quan hệ lớn, nhỏ của hai số, quy định số lớn ở phía mở của kí hiệu. Ví dụ : a lớn hơn 1 thì viết $a > 1$ hoặc $1 < a$. Ví dụ : a^n, nếu n là nguyên dương thì

$$a^n = \underbrace{a.a \ldots a}_{\text{n chữ a}}$$

tức nhân liên tục n lần a ; nếu n không phải nguyên dương,

$$a^n \neq \underbrace{a.a \ldots a}_{\text{n chữ a}}$$

Ví dụ n là nguyên âm thì $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ $(a \neq 0)$, ý nghĩa của nó là số đảo của a lũy thừa âm n. Đó là một phân thức.

Hiểu sâu sắc ý nghĩa các kí hiệu khái niệm toán học có tác dụng to lớn trong việc vận dụng nó để giải bài tập. Ví dụ : chứng minh qui tắc nhân hai lũy thừa có cùng cơ số, số mũ nguyên, âm $a^m.a^n = a^{m+n}$ (m, n là nguyên, âm, $a \neq 0$), Nếu bạn đã biết $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$ (m là nguyên âm, $a \neq 0$) thì tự mình sẽ biết chứng minh : vì m, n là nguyên âm, $a \neq 0$, nên $a^m.a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} . \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m} . a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$. Nếu không chúng ta không thể tiến lên được bước nào ngay cả bước thứ nhất.

Có một số khái niệm ý nghĩa gần giống nhau, về hình dạng kí hiệu có cấu tạo gần tương tự, như hai kí hiệu "$\cong$" và "$\sim$". Cấu tạo của những kí hiệu này đều có lý riêng của nó. Vì bằng là trường hợp đặc biệt của đồng dạng (tỉ số đồng dạng là 1) chỉ có thế mà thôi.

Dấu bằng "=" chỉ biểu thị bằng nhau về số lượng, do đó dấu "≅" có thể hiểu là "tỉ số đồng dạng là 1, tức là bằng nhau". Như vậy qua mối quan hệ của hai ký hiệu trên ta rất dễ hiểu và nhớ chúng.

Nhóm thứ hai là do nhu cầu giải bài tập mà đặt ra những ký hiệu chung.

Ngoài những kí hiệu qui định thống nhất ở trên, trong quá trình giải bài tập, đối với những khái niệm phải diễn đạt dài dòng hoặc dùng nhiều lần, người ta đã dùng phương thức tu từ chỉ riêng toán học có, đó là : dùng những chữ cái khác nhau để biểu thị những khái niệm cần diễn đạt. Ví dụ trong đề bài giải hệ phương trình, giả thiết đại lượng cần tìm (trọng lượng vật thể, số người của phân xưởng, thời gian công tác, tốc độ hoặc quãng đường đi...) là x, y, v.v... Trong tính diện tích tam giác hoặc chứng minh hình học, ta giả thiết diện tích tam giác là S.

Trong khi học cần biết dùng những kí hiệu chung để biểu thị những khái niệm mà trong quá trình diễn toán dễ làm ta rối mắt. Dưới đây lấy một đề hình học làm ví dụ.

Đã biết trong RtΔ ABC, $\angle$ B = 90°, AB + BC + CA = 30cm, AB - BC = 7cm. Tìm độ dài AC ?

Căn cứ điều kiện chúng ta nghĩ ngay đến dùng định lý Pitago viết ra đẳng thức $BC^2 + (BC + 7)^2 = [30 - BC - (BC + 7)]^2$. Đây là phương trình bậc hai một ẩn số có độ dài BC chưa biết. Nếu khai triển ra sẽ rất dài dòng, tốn sức.

$$BC^2 + BC^2 + 14BC + 49 = 23^2 - 92\ BC + 4BC^2$$

Sau khi rút gọn được : $BC^2 - 53BC + 5 \times 48 = 0$

Ta dùng cách viết khác : Giả thiết BC = x cm, ta sẽ có

$$AB = (x + 7)\ cm,\ AC = 30 -(x + x + 7) = (23 - 2x)cm.$$

Từ định lý Pitago $x^2 + (x + 7)^2 = (23 - 2x)^2$

Rút gọn được $x^2 - 53x + 5 \times 48 = 0$

Từ đó $x_1 = 5, x_2 = 48$ (bị loại)

nên $AC = 23 - 2 \times 5 = 13$(cm).

So sánh hai cách diễn đạt ở trên bạn có cảm giác cách viết thứ hai gọn rõ hơn không ? Từ cách viết thứ hai còn có thể nảy ra gợi ý : kí hiệu thay thế thực chất là một cách đại số hóa.

Có thể có người sẽ hỏi : dùng chữ cái để biểu thị một khái niệm hay dùng hoặc tránh diễn đạt dài dòng có gây ra hạn chế gì không ? Ví dụ độ dài đoạn thẳng hay cung tròn đều nhất loạt dùng a, b, c, ... để biểu thị, còn chiều cao của tam giác hay tứ giác đều dùng h ? Điểm qua lịch sử phát triển toán học, chúng tôi chưa phát hiện thấy tài liệu nào nói về quy định này, nhưng để tiện trong đọc sách và giao tiếp, mọi người đều tuân theo thói quen như thế. Song, một chữ cái không phải chỉ dùng để biểu thị cho một khái niệm. Ví dụ "S" cũng còn dùng để biểu thị hành trình, còn trong hình học nó dùng để biểu thị diện tích, trong số liệt biểu thị tổng của số liệt. Cho nên trong giải bài tập khi dùng đến ký hiệu thay thế vừa nên dùng theo thói quan, vừa không nên để cho thói quen ràng buộc. Với điều kiện không gây ra lẫn lộn, hiểu nhầm, có thể căn cứ vào tình hình cụ thể mà dùng kí hiệu thay thế cho phù hợp.

6 - BẮT ĐẦU TỪ CÂU CHUYỆN "A VÀ B ĐỀU THẾ CẢ"

Đầu tiên kể câu chuyện vui. Trong một lần lên lớp, thầy giáo ra đề "Biết a + c = b + c, hỏi giữa a và b có quan hệ gì ?". Một em học sinh trả lời ngay : "a và b cũng thế", cả lớp cười ầm lên.

Em học sinh đó cảm thấy nói như thế là đắc địa lắm rồi, nên nghĩ "Tại sao lại cười tôi ?" Thầy giáo hỏi cả lớp : "Các em cười gì ? " Có một em nói : "Không nên nói a và b thì cũng thế, mà phải nói a và b bằng nhau, tức a = b". Cả lớp cười bạn đó là vì bạn ấy không dùng đúng ngôn ngữ toán để trả lời.

Bất kỳ môn khoa học nào cũng có thuật ngữ riêng của nó. Ngôn ngữ toán học là một loại thuật ngữ toán được chuyên môn hóa. Nó có ba đặc điểm cơ bản : 1) Nghĩa chính xác. Mỗi danh từ, ký hiệu hoặc những biểu thức do các ký hiệu tạo thành đều biểu thị một ý nghĩa rõ ràng, không thể hiểu thành hai nghĩa. Ví dụ : $\log_a x$ biểu thị log của x có cơ số là a, lgx là log của x có cơ số 10 ; $y = kx$ $(k \neq 0)$ biểu thị y là hàm số tỉ lệ thuận của x ; $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ biểu thị y là hàm số tỉ lệ nghịch của x, v.v... 2) Diễn đạt ngắn gọn. Ví dụ : câu "bình phương hiệu của a và b bằng 5" dùng ký hiệu để biểu diễn là : $(a - b)^2 = 5$, còn câu "hiệu bình phương của a và b bằng 5" nếu dùng kí hiệu để diễn đạt là : $a^2 - b^2 = 5$. Qua đó ta thấy rõ, ngôn ngữ kí hiệu không những ý chính xác mà còn "rút ngắn" rất nhiều so với dùng ngôn ngữ thông thường. 3) Sử dụng thuận tiện, linh hoạt. Ví dụ trong công thức hiệu bình phương $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, a và b có thể là một số hoặc biểu thức bất kỳ tùy ý. Rộng hơn nữa mà nói, a và b trong công thức có thể biểu thị hai kí hiệu khác vị trí.

Do đó ta có $(2x + 3y)(2x - 3y) = 4x^2 - 9y^2$; $(x^n + y^n)(x^n - y^n) = x^{2n} - y^{2n}$; $(\log_3 a + 2)(\log_3 a - 2) = (\log_3 a)^2 - 4$; $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = 1 - \sin^2 x$, v.v... Đó là điểm khác nhau cơ bản của ngôn ngữ toán và ngôn ngữ thông thường.

Trong ngôn ngữ kí hiệu toán, dùng kí hiệu để biểu thị quan hệ tính toán của các biểu thức có thể biến đổi theo một qui tắc nhất định. Ví dụ $x - y = 0$, có thể suy ra $x = y$; từ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ có thể suy ra $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$; từ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ suy ra $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ hay $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$, $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$, v.v...

Có được những biểu thức này, khi gặp những bài toán khác nhau là có thể vận dụng linh hoạt.

Trên đây chỉ mới đưa ra ngôn ngữ kí hiệu của Toán học. Thực ra, hình thức diễn đạt của ngôn ngữ toán có hai loại : Một loại là thuật ngữ chữ viết như "hình được tạo thành bởi một đầu chung của hai đoạn thẳng gọi là góc" ; một loại nữa là ngôn ngữ hình học, nó bao gồm các hình hình học, đồ thị và các lược đồ.

Chúng ta cần tư duy toán học một cách chính xác và học sử dụng chuẩn xác ngôn ngữ toán là điều vô cùng quan trọng. Đương nhiên đây không phải việc làm một sáng một chiều mà phải nỗ lực liên tục.

7 - LÀM THẾ NÀO ĐỂ HỌC TỐT KHÁI NIỆM TOÁN HỌC

Chúng ta hàng ngày tiếp xúc với đủ loại khái niệm. Nếu xem tư duy con người như một cơ thể sống thì khái niệm sẽ là các đơn vị nhỏ nhất – tế bào để cấu tạo thành cơ thể tư duy đó. Do đó, học tốt các khái niệm toán chính là điều kiện cơ bản để bảo đảm tư duy toán học chính xác. Không chú ý học tốt khái niệm, cho rằng học toán là giải các đề toán, chỉ nghĩ đến làm bài tập, như thế sẽ mất căn bản, tất nhiên sẽ không học tốt được. Dưới đây thử bàn xem làm thế nào để học tốt các khái niệm toán học.

1. Làm sáng tỏ hai loại khái niệm

Bất cứ khái niệm toán học nào cũng đều chứa hai yếu tố. Thứ nhất là có tên riêng. Nói chung tên gọi khác nhau biểu thị khái niệm khác nhau. Ví dụ "số dương" và "số âm" đều là hai khái niệm khác nhau. Nhưng cũng có một ít khái niệm thuộc ngoại lệ, như "số tự nhiên" và "số nguyên dương" thực tế là cùng một khái niệm.

Cùng một khái niệm nhưng có nhiều tên gọi khác nhau. Thứ hai là có một hàm nghĩa xác định hay nói cách khác là có những tính chất riêng khác với các khái niệm khác. Đây là điều quan trọng nhất đối với khái niệm. Ví dụ hàm nghĩa của khái niệm "phương trình" là "đẳng thức chứa ẩn số". Như vậy, phàm là "đẳng thức không chứa ẩn số" hoặc "các phép tính chứa ẩn số" đều không phải là phương trình. Cái quy định ý nghĩa của khái niệm (danh từ hoặc thuật ngữ) chính là định nghĩa của khái niệm (danh từ hoặc thuật ngữ) này. Như vậy có một loại khái niệm được gọi là khái niệm định nghĩa. Ví dụ khái niệm "giá trị tuyệt đối", "góc nhị diện", v. v... đều là những khái niệm định nghĩa. Trong toán tuyệt đại bộ phận là khái niệm định nghĩa.

Sao lại nói "tuyệt đại bộ phận khái niệm là khái niệm định nghĩa" mà không nói "toàn bộ các khái niệm đều là khái niệm định nghĩa". Ta biết rằng, con người trên cơ sở đã có tri thức và kinh nghiệm mới đi nhận thức những sự vật khác. Sự hình thành một khái niệm mới phải trên cơ sở của khái niệm cũ. Muốn định nghĩa một khái niệm mới tất nhiên phải dùng đến các khái niệm đã biết. Nếu ta tưởng tượng các khái niệm cũ như những khối gỗ có hình dạng khác nhau thì khái niệm mới sẽ là những khối gỗ cũ hợp thành. Ví dụ ta chọn các khái niệm cũ là "lớn hơn", "nhỏ hơn" "góc vuông", "góc bẹt", "góc không". Nếu ta tổ hợp thành "lớn hơn góc không, nhỏ hơn góc vuông" thì ta sẽ được khái niệm mới là "góc nhọn". Nếu thay thành "lớn hơn góc vuông, nhỏ hơn góc bẹt" thì ta sẽ được khái niệm mới là "góc tù". Tiến thêm một bước nữa hỏi "lớn hơn", "nhỏ hơn" "góc vuông", "góc bẹt", "góc không", hàm nghĩa của những khái niệm này được quy định ra sao ? Hoặc nói cách khác, những khái niệm đã biết để tổ hợp thành các khái niệm này là gì ? Nếu cứ tiếp tục truy hỏi như thế thì cuối cùng ta sẽ đi đến chỗ không có cách gì trả lời được. Sự thực là cuối cùng vẫn có một số khái niệm mà hàm nghĩa của nó không thể qui định rõ ràng. Ví dụ cứ lấy khái niệm "hai đường thẳng vuông góc nhau" ra mà nói thì trong định nghĩa này đã dùng đến các khái niệm đã biết là "đường thẳng", "giao nhau", "vuông góc", trong đó ý nghĩa

của khái niệm đường thẳng trong sách giáo khoa môn hình học chưa qui định rõ. Để phân biệt với các khái niệm định nghĩa giống như khái niệm mà hàm nghĩa chưa thể quy định được rõ ràng này, người ta gọi đó là khái niệm không định nghĩa hoặc khái niệm ban đầu. Khái niệm ban đầu tuy hàm nghĩa không được quy định rõ ràng này nhưng mọi người đều có sự hiểu thống nhất về nó. Ví dụ sợi giây được kéo thẳng hai đầu, hằn gấp của trang giấy, cạnh của mặt bàn, tia sáng, v.v... đều cho chúng ta hình ảnh của đường thẳng. Mặt gương phẳng nhẵn cho ta hình ảnh mặt phẳng. Một bên của bờ sông cho ta hình ảnh cùng một phía, v.v...

Trong toán, số khái niệm ban đầu không nhiều. Những khái niệm ban đầu thường gặp là điểm, đường thẳng, mặt phẳng, cùng phía, khác phía, đối nhau, tập hợp, v.v... Khái niệm ban đầu là nền móng của các khái niệm khác.

2. Làm rõ điều kiện và kết luận của định nghĩa

Khái niệm định nghĩa là loại khái niệm thường gặp trong toán học. Mọi người đều biết, mệnh đề là câu phán đoán về một sự việc hoặc một sự vật có tính chất nào đó. Định nghĩa cũng là câu phán đoán sự vật, cho nên định nghĩa cũng là mệnh đề. Nó cũng do hai bộ phận là điều kiện và kết luận tạo thành. Làm rõ điều kiện và kết luật của định nghĩa là yêu cầu cơ bản để học tốt định nghĩa của khái niệm toán. Làm sao để phân định được điều kiện và kết luận ? Ta thử xét một ví dụ. Định nghĩa đường thẳng song song là "hai đường thẳng cùng mặt phẳng không cắt nhau gọi là hai đường thẳng song song". Phân tích câu này ta thấy nó thuộc dạng câu có chữ "... gọi là..." Trong câu định nghĩa, phần trước chữ "gọi là" nói chung là phần điều kiện, danh từ hay thuật ngữ đứng sau "gọi là" là kết luận. Do đó, trong định nghĩa các đường thẳng song song, điều kiện là : "những đường thẳng trong cùng mặt phẳng ; không cắt nhau", kết luận là "các đường thẳng song song", trong đó phần điều kiện chỉ rõ hàm nghĩa của khái niệm, phần kết luận là tên của khái niệm.

Sau khi làm rõ điều kiện của định nghĩa, tiếp theo nên phân tích và lý giải nó. Thử suy nghĩ trong định nghĩa có mấy điều kiện ? ví dụ trong định nghĩa về đường tròn có hai điều kiện : điều kiện thứ nhất là "các điểm đều nằm trên một mặt phẳng", điều kiện thứ hai là "tập hợp các điểm đó cách đều một điểm cố định". Hai điều kiện này nếu thiếu một là không được. Ví dụ không có điều kiện "trong cùng mặt phẳng", lúc đó tập hợp điểm này không còn là đường tròn mà là mặt cầu. Do đó nếu thiếu điều kiện cũng tức là định nghĩa đã thay đổi và sẽ không có được khái niệm ban đầu nữa. Có một số định nghĩa nếu bỏ bớt điều kiện nào đó sẽ làm cho khái niệm mất hết ý nghĩa. Ví dụ lũy thừa mũ không được định nghĩa như sau : $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. Ở đây điều kiện $a \neq 0$ là vô cùng quan trọng, vì nếu $a = 0$ thì a^0 không có ý nghĩa. Nguyên khái niệm số mũ không là do hiệu hai số mũ có cùng cơ số mà ra, nó biểu thị thương của hai số bằng nhau chia cho nhau (số không không thể là số bị chia). Còn 0^0 là $\frac{0^n}{0^n}$ tức số không là số bị chia, do đó 0^0 là không có ý nghĩa.

Ngoài ra, còn phải chú ý đến những từ then chốt trong điều kiện của định nghĩa. Ví dụ trong hình học không gian, định nghĩa về hai đường thẳng khác mặt phẳng là : "Hai đường thẳng *không cùng nằm trong một mặt phẳng bất kì* gọi là hai đường thẳng khác mặt phẳng. Suy nghĩ kĩ về câu này ta thấy hai đường thẳng *không cùng nằm trong một mặt phẳng* thì sẽ không thể có mặt phẳng chung, tức không thể tìm được một mặt phẳng chứa hai đường thẳng này. So sánh với trường hợp đường thẳng song song, hai đường thẳng khác mặt phẳng không những không có điểm chung mà đặc trưng cơ bản nhất của nó là bất cứ trường hợp nào cũng không có một mặt phẳng chung.

Các điều kiện trong định nghĩa bị thiếu thì không được, nếu nhiều hơn có được không ? Ví dụ định nghĩa hình chữ nhật là : "Hình bình hành có 4 góc vuông gọi là hình chữ nhật". Nếu đổi thành "hình bình hành có 4 góc vuông gọi là hình chữ nhật" thì

có được không ? Thực ra, đó là điều hoàn toàn không cần thiết. Bởi vì từ "hình bình hành có 1 góc vuông" đã dễ dàng có thể suy ra 4 góc của nó đều vuông. Cho nên, sửa định nghĩa hình chữ nhật lại như vậy là đã tăng thêm điều kiện cho nó. Các điều kiện trong định nghĩa cần phải độc lập lẫn nhau, không được suy từ cái này ra cái khác.

3. Học cách dùng định nghĩa thuận và định nghĩa ngược

Mệnh đề có cái thật, cái giả. Các điều kiện và kết luận trong mệnh đề thật có quan hệ suy ra nhau. Ví dụ : "Hai góc đối đỉnh bằng nhau" là mệnh đề thật, do điều kiện "hai góc là đối đỉnh" cho nên có thể suy ra kết luận "hai góc này bằng nhau". Giữa điều kiện và kết luận của mệnh đề giả không có mối quan hệ suy ra đó.

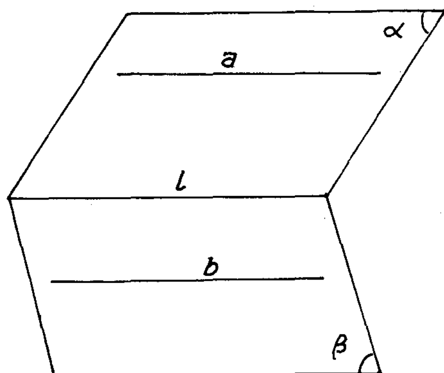
Tất cả các định nghĩa toán đều là mệnh đề thật. Không những thế mà các mệnh đề ngược của nó cũng là mệnh đề thật. Nói cách khác, tất cả các định nghĩa đều có thể đảo ngược được, tức là đều có đầy đủ tính tất yếu. Tính có thể đảo ngược của định nghĩa là một đặc tính quan trọng của định nghĩa. Ví dụ định nghĩa hằng đẳng thức của đại số : "Nếu hai biểu thức đại số, dù các đại lượng bằng chữ của chúng lấy giá trị nào (khiến cho hai biểu thức có ý nghĩa) thì giá trị của biểu thức đại số này vẫn bằng nhau, ta gọi hai biểu thức đại số đó là hằng đẳng thức".

Mệnh đề ngược của nó là : "Nếu hai biểu thức đại số luộn bằng nhau thì cho dù các đại lượng bằng chữ của chúng (khiến cho hai biểu thức có nghĩa) lấy giá trị nào, giá trị hai biểu thức đại số này vẫn luôn bằng nhau". Đương nhiên, mệnh đề ngược này cũng đúng.

Tính nghịch đảo của định nghĩa có công dụng rất quan trọng. Thứ nhất là dùng định nghĩa để có thể phán đoán một sự vật nào đó có thuộc khái niệm này không ; thứ hai là mệnh đề ngược của định nghĩa có thể nói rõ được tính chất của một danh từ hoặc

thuật ngữ nào đó mà nó có. Chúng ta cần học cách nắm vững vận dụng định nghĩa thuận và ngược mới có thể vận dụng định nghĩa để giải quyết vấn đề.

Ví dụ : Sau khi đã học định nghĩa về giải phương trình "tìm giá trị của ẩn số để khi thay vào hai vế của phương trình bằng nhau, gọi là giải phương trình". Chúng ta có thể dùng định nghĩa này để giải quyết hai loại vấn đề : loại thứ nhất là kiểm nghiệm giá trị của ẩn số có phải là nghiệm của phương trình không. Ví dụ kiểm nghiệm $x_1 = 6$, $x_2 = 4$ có phải là nghiệm của phương trình $2x - 3 = 5$ không ? Đề này rất đơn giản, dùng định nghĩa thuận giải phương trình, chỉ cần thay $x = 6$ và $x = 4$ vào phương trình, so sánh hai vế là được. kết quả $x = 6$ không phải là nghiệm, chỉ số $x = 4$ là nghiệm của phương trình. Loại thứ hai là : tìm hệ số của các đại lượng trong phương trình. Ví dụ : Cho biết $x = -2$ là một nghiệm của phương trình $x^2 + ax - 1 = 0$. Tìm a. Dùng định nghĩa ngược giải phương trình, $x = -2$ là nghiệm của phương trình, nên thay $x = -2$ vào phương trình ta sẽ được $4 - 2a - 1 = 0$, do đó $a = 3/2$.



Hình 8-1

Trên kia đã nói đến khái niệm các đường thẳng khác mặt phẳng, căn cứ vào định nghĩa đường thẳng khác mặt phẳng là có thể phán đoán hai đường thẳng a, b là hai đường thẳng khác mặt phẳng hay không ? Ví dụ, trên hình 8-1 $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, $a // l$, $b // l$. Phán đoán xem a và b là khác hay cùng mặt phẳng.

Đương nhiên, hai đường thẳng a, b không phải là những đường thẳng khác mặt phẳng. Vì $a // l$, $b // l$ nên ta có $a // b$.

Như vậy ta sẽ xác định được a, b là cùng mặt phẳng. Điều đó nói rõ hai đường thẳng a và b tuy phân biệt ở trên hai mặt phẳng α và β, nhưng ngược lại chúng cùng nằm trong mặt phẳng γ, nên không phù hợp với định nghĩa các đường thẳng khác mặt phẳng, cho nên a và b không phải là những đường thẳng khác mặt phẳng.

Trong chứng minh của bài toán sau đây vừa dùng định nghĩa thuận vừa dùng định nghĩa ngược. Ví dụ hình 8-2, CD là đường phân giác của góc $\widehat{AOB}$, AO = BO. Chứng minh : CD là phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

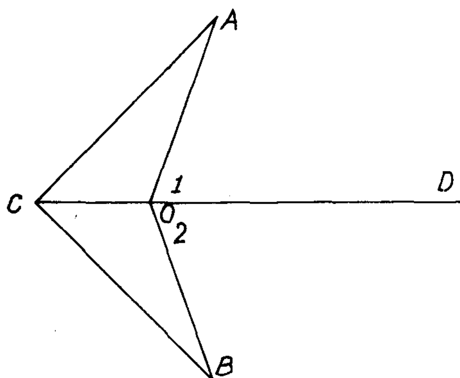
Chứng minh : vì CD là phân giác của góc $\widehat{AOB}$, cho nên góc 1 = góc 2 (theo định nghĩa đường phân giác)*.

nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$.

Vì CO = CO, AO = BO,

nên $\Delta ACO = \Delta BCO$,

suy ra $\widehat{ACO} = \widehat{BCO}$



Hình 8-2

Do đó CD là đường phân giác của góc $\widehat{ACB}$ (theo định nghĩa đường phân giác của góc **).

Dễ dàng thấy rằng dấu * trong ngoặc là dùng định nghĩa thuận của đường phân giác, còn ** là dùng định nghĩa ngược của đường phân giác.

4. Tìm hiểu quan hệ giữa hai khái niệm

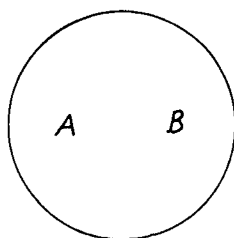
Trong một lần lên lớp, học sinh giải phương trình bậc 2 một ẩn số : $x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$, được hai nghiệm -1 và $\sqrt{2}$. Thầy giáo hỏi hai nghiệm này là nghiệm thực hay là nghiệm ảo.

Khá nhiều học sinh trả lời : "-1 là nghiệm ảo, $\sqrt{2}$ là nghiệm thực". Thử nghĩ xem trả lời như thế có đúng không ? Lẽ nào -1 không phải là nghiệm thực ?

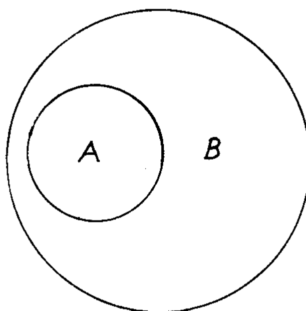
Trong học toán thường có hiện tượng thế này : khi bắt đầu học một khái niệm mới, tự mình cảm thấy hiểu rồi, giải bài tập cũng đúng rồi. Nhưng về sau, khi đã học được nhiều khái niệm khác mới phát hiện rằng, trước kia hiểu khái niệm đó còn lơ mơ, thường lẫn với những khái niệm khác. Điều đó chứng tỏ khi học các khái niệm, chỉ trong một phạm vi nhỏ thì rất khó hiểu rõ hàm nghĩa của khái niệm ấy. Chúng ta phải ở trong một phạm vi rộng hơn để so sánh mối quan hệ giữa các khái niệm thì mới có thể hiểu rõ thêm hàm nghĩa của khái niệm đó.

Mối quan hệ thường gặp giữa các khái niệm toán học có 4 loại : quan hệ bằng nhau, quan hệ phụ thuộc, quan hệ ngang nhau và quan hệ mâu thuẫn. Dưới đây sẽ giải thích rõ từng loại.

Quan hệ bằng nhau : nếu phạm vi của khái niệm A và khái niệm B hoàn toàn bằng nhau thì ta nói, quan hệ của A và B là quan hệ bằng nhau. Chúng được biểu thị trên hình 8-3. Ví dụ số nguyên dương và số tự nhiên, phân số và số thập phân (thập phân hữu hạn và thập phân vô hạn tuần hoàn), v.v...



Hình 8-3

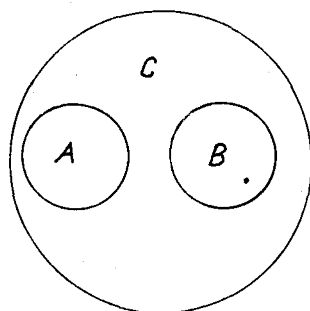


Hình 8-4

Quan hệ phụ thuộc : nếu phạm vi khái niệm B bao gồm phạm vi khái niệm A thì ta nói khái niệm A phụ thuộc khái niệm B, như hình vẽ 8-4 biểu thị.

Trong toán học loại khái niệm quan hệ phụ thuộc rất nhiều như số hữu tỉ, số vô tỉ và số thực ; số nguyên, phân số và số hữu tỉ ; phép tính căn bậc hai và căn bậc hai ; phương trình bậc nhất 1 ẩn số, phương trình bậc hai 1 ẩn số và phương trình dạng nguyên ; hàm số tỉ lệ thuận và hàm số bậc nhất ; góc nhọn, góc vuông, góc tù, góc bẹt và góc ; tam giác đều và tam giác đồng dạng ; hình lăng trụ và hình bình hành ; hàm số sin và hàm số lượng giác, v.v...

Quan hệ ngang nhau : phạm vi khái niệm A và khái niệm B hoàn toàn khác nhau, nhưng đều phụ thuộc khái niệm C, vậy ta nói khái niệm A và khái niệm B có quan hệ ngang nhau như trên hình 8-5 đã vẽ.



Hình 8-5

Như số nguyên và phân số, tuy phạm vi của chúng khác nhau, nhưng đều thuộc khái niệm số hữu tỉ cho nên số nguyên và phân số là hai khái niệm ngang nhau. Ngoài ra còn có số hữu tỉ và số vô tỉ ; căn thức bậc hai và căn thức bậc ba ; phương trình 1 ẩn số và phương trình 2 ẩn số. ; hình bình hành và hình chữ nhất ; hàm số bậc nhất và hàm số bậc 2 ; hàm số sin và hàm số cosin, v.v... đều là những quan hệ ngang nhau.

Quan hệ mâu thuẫn : hàm nghĩa của khái niệm A và khái niệm B hoàn toàn ngược nhau, khi đó ta nói khái niệm A và khái niệm B có quan hệ mâu thuẫn. Ví dụ lũy thừa và khai căn ; tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch ; giá trị cực đại và cực tiểu ; tăng và giảm, v.v... đều là những quan hệ mâu thuẫn.

Trong quá trình học các khái niệm, nên thường xuyên phân tích và so sánh quan hệ của chúng để dần dần hiểu sâu các khái niệm.

5. Tìm hiểu sự biến hóa và phát triển của các khái niệm

Trên kia đã nói, mỗi khái niệm đều có một hàm nghĩa xác định. Đó là căn cứ để phân các khái niệm với nhau. Vậy có thể cho rằng hàm nghĩa của mỗi khái niệm là mãi mãi không thay đổi không ? Chúng ta thử xem trong sách giáo khoa hình học, "góc" được định nghĩa như thế nào ? Ở cấp I, góc là "hình vẽ được tạo thành bởi hai đường thẳng xuất phát từ một điểm". Còn trong tam giác lượng thì góc được xem là "là một tia quay quanh một đầu của nó mà hình thành". Điều đó chứng tỏ khái niệm về góc đã thay đổi và phát triển. Trên thực tế không ít khái niệm toán học đều đang thay đổi và phát triển.

Do khoa học, kĩ thuật không ngừng phát triển, nhận thức của con người về sự vật cũng ngày càng đi sâu và tinh tế hơn. Do đó những khái niệm phản ánh những đặc trưng bản chất của sự vật cũng không ngừng phát triển. Ví dụ môn đại số là từ các phép tính mở rộng phát triển mà thành. Bắt đầu là khoa học nghiên cứu dùng các chữ cái để biểu thị các phép tính, về sau phát triển thành khoa học nghiên cứu lí luận phương trình, tức là môn đại số trong sách giáo khoa hiện nay. Ngày nay đại số đã trở thành khoa học nghiên cứu các cấu trúc của toán học. Tên gọi "đại số" tuy chưa thay đổi nhưng hàm nghĩa của nó thì đã thay đổi rất sâu sắc.

Làm sáng tỏ hàm nghĩa của những khái niệm nào trong sách giáo khoa đã có sự thay đổi và phát triển, rất có ích cho việc hiểu các khái niệm một cách toàn diện, bồi dưỡng cho năng lực tư duy biện chứng.

Sự phát triển các khái niệm trong toán học phổ thông có ba loại hình khác nhau.

Loại thứ nhất là hoàn thiện. Cùng với sự mở rộng phạm vi nghiên cứu, hàm nghĩa của các khái niệm cũng ngày càng hoàn chỉnh.

Ví dụ khái niệm góc. Trong hình học phẳng thường dùng định nghĩa rất ổn định là "hình được tạo thành bởi hai đường thẳng cùng xuất phát từ một điểm chung". Hiển nhiên, điều này chỉ phù hợp với góc dương trong phạm vi từ 0^o - 360^o. Trong tam giác lượng định nghĩa của góc là "hình được tạo thành bởi một tia quay quanh một đầu của nó :. Tức là từ trạng thái tĩnh sang trạng thái động. Với định nghĩa này phạm vi của góc mở rộng thành góc lớn nhỏ bất kì (bao gồm góc dương, góc âm và góc không). Đến hình học không gian lại có "góc giữa đường thẳng và mặt phẳng", "góc nhị diện". Khái niệm góc trong mặt phẳng phát triển sang không gian, biến thành ngày càng hoàn thiện hơn.

Loại thứ hai là phát triển theo chiều dọc. Khái niệm phát triển theo chiều dọc về sau bao hàm cả khái niệm đã nói ở trên.

Ví dụ khái niệm về giá trị tuyệt đối. Ở cấp hai định nghĩa trị số tuyệt đối của số thực a là :

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

Lên cấp PTTH, sau khi mở rộng đến phức số, phức số a + bi (a, b ∈ R) có trị số tuyệt đối là $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Như vậy trị số tuyệt đối của số thực có thể được xem là trường hợp đặc biệt của số phức. Định nghĩa trị số tuyệt đối của số thực hoàn toàn có thể được thay bằng trị số tuyệt đối của số phức.

Loại thứ ba là mở rộng theo chiều ngang. Tên gọi thì còn nhưng thực chất là mất.

Ví dụ định nghĩa của số mũ là :

Lũy thừa số mũ nguyên dương $a^n = \underbrace{a.a\ldots a}_{\text{n lần a}}$ (n nguyên dương)

Lũy thừa mũ không $a^o = 1$ $(a \neq 0)$

Lũy thừa mũ âm $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (a ≠ 0, n nguyên dương)

Lũy thừa mũ phân số dương $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (m, n nguyên dương, a > 0)

Lũy thừa mũ phân số âm $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ (m, n nguyên dương, a > 0)

Lũy thừa số mũ vô tỉ a^n (a > 0, n số vô tỉ) là giới han chung của hai dãy số vô cùng được tạo thành bởi các giá trị gần thiếu và gần thừa của n.

Từ sự phát triển của khái niệm lũy thừa có thể thấy rõ : khái niệm lũy thừa sau cùng đã hoàn toàn khác xa với khái niệm ban đầu. Do đó mà nói tên gọi thì còn nhưng thực chất đã mất.

8 - LÀM SAO ĐỂ HỌC TỐT ĐỊNH LÍ

Định lí toán học là căn cứ quan trọng để giải bài tập. Nó khác với định nghĩa, khái niệm ở chỗ không dùng phương pháp khái quát trừu tượng để đưa ra những quy định về ý nghĩa của một khái niệm nào đó, mà là vận dụng phương pháp suy diễn lô-gic, căn cứ vào những định nghĩa, những nguyên lí và định lí đã biết, với những dữ kiện đã cho để tìm ra kết luận mới. Do đó việc học định lí không giống học các khái niệm toán học. Vậy làm thế nào để học tốt định lí ?

1. Học cách phân tích định lí

Bất kì định lí, quy tắc và công thức toán học nào cũng đều diễn tả các mối quan hệ giữa các khái niệm theo một điều kiện nhất

định. Do đó khi phân tích các định lí, quy tắc và công thức phải hết sức chú ý phân tích sự liên quan giữa các khái niệm.

1.1. Phải dựa trên tổng thể để tìm hiểu hàm nghĩa : Khi gặp một định lí, quy tắc và công thức mới, trước hết phải tập trung sức để hiểu một cách tổng thể chứ không nên cứ bám khư khư vào từng chi tiết. Ví dụ : quy tắc bỏ dấu ngoặc trong phép tính đại số, trong sách lời văn ghi là : "khi trước dấu ngoặc có dấu cộng, thì khi bỏ dấu ngoặc, bỏ luôn dấu cộng trước nó, dấu của các số hạng trong ngoặc không thay đổi ; khi trước dấu ngoặc là dấu trừ, khi bỏ dấu ngoặc phải bỏ luôn dấu trừ và đổi dấu tất cả các số hạng trong ngoặc". Như vậy theo câu chữ thì ta có hai quy tắc bỏ dấu ngoặc khác nhau : bỏ dấu ngoặc và bỏ luôn dấu "+" hoặc dấu "–" trước nó ; sau khi bỏ dấu ngoặc hình thức thay đổi nhưng giá trị không thay đổi.

Đối với những định lí, quy tắc dùng lời để diễn đạt, nếu có thể dùng ngôn ngữ kí hiệu để diễn đạt chúng thì ta có thể từ trên kết cấu các phép tính của biểu thức để nhận ra chúng, từ đó có thể hiểu rõ mối quan hệ giữa các khái niệm mà quy tắc hay định lí muốn diễn đạt. Ví dụ theo quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có thể viết như sau :

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Nói chung bỏ dấu ngoặc là một hình thức biến đổi biểu thức, nhưng vẫn bảo đảm giá trị hai vế của đẳng thức bằng nhau.

Dưới đây, ta thử xem khi bỏ dấu ngoặc của đẳng thức sau có gì sai sót không ? $a^2 - (2a - b - c) = a^2 - 2a - b - c$. Nhất định bạn sẽ nói bài này giải sai. Đúng thế, vì sau khi bỏ dấu ngoặc và dấu "–" trước nó, hai số hạng –b, –c phải đổi dấu mới đúng.

Ví dụ : Xét đẳng thức log : $a^{\log_a N} = N$. Theo hình thức diễn đạt ấy mà nói thì đó là một dạng lũy thừa có số mũ là log. Ý nghĩa của đẳng thức đó là : lấy a làm cơ số, số mũ là $\log_a N$ nên

đẳng thức vẫn bằng N. Hiểu được ý nghĩa của đẳng thức log ta sẽ tìm được rất nhanh $2^{\log_2 7} = 7$. Còn $2^{\log_{\frac{1}{2}} 7} \neq 7$, vì cơ số $\frac{1}{2}$ của số mũ khác với cơ số 2.

Trong hình học không gian, định lí quan hệ của đường thẳng và mặt phẳng đều có thể dùng các kí hiệu về quan hệ tập hợp để diễn đạt. Ví dụ định lí về tính chất song song của hai mặt phẳng như sau : "Nếu hai mặt phẳng song song đồng thời cắt một mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến của chúng song song với nhau". Câu đó có thể diễn đạt như sau : "Nếu $\alpha \,//\, \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$ thì $a \,//\, b$".

Từ dạng diễn đạt đó ta dễ dàng thấy được : điều kiện để từ định lí hai mặt phẳng song song suy ra hai đường thẳng song song là phải tồn tại mặt phẳng thứ ba cắt hai mặt phẳng kia.

Có những định lí cách diễn đạt rất dài, mối quan hệ khá phức tạp, vì vậy trước hết cần phải hiểu rõ ý nghĩa khái niệm của từng phần, sau đó mới tìm hiểu nó trên tổng thể. Ví dụ định lí về các đường thẳng song song chia một đường thẳng khác thành những đoạn bằng nhau trong hình học phẳng là : "Hai đường thẳng bị một nhóm đường thẳng song song chia cắt, nếu một trong những đường thẳng ấy ta nhận được những đoạn thẳng bằng nhau thì trên đường thẳng kia cũng sẽ nhận được những đoạn thẳng bằng nhau". Định lí này có thể phân tích thành ba ý như sau :

A. Hai đường thẳng bị một nhóm đường thẳng song song chia cắt ;

B. Nếu trên 1 đường thẳng nhận được những đoạn thẳng bằng nhau ;

C. Vậy trên đường thẳng kia cũng nhận được những đoạn thẳng bằng nhau.

Ta hiểu A như sau : Hai đường thẳng ở đây là hai đường thẳng có vị trí bất kì (song song hoặc giao nhau). 1 nhóm đường thẳng song song là chỉ 3 đường hoặc từ 3 đường trở lên song song với

nhau, khoảng cách giữa chúng có thể bằng nhau hoặc khác nhau. Ý của phần này là cho 3 đường thẳng hoặc 3 đường thẳng trở lên song song với nhau cắt 2 đường thẳng kia (có thể song song hoặc không song song với nhau) theo góc tùy ý (có thể là cắt theo góc vuông, hoặc cắt xiên).

Đối với B ta có thể hiểu : Một trong hai đường thẳng bị cắt thành những đoạn bằng nhau (những đoạn bằng nhau này nói chung không biểu thị khoảng cách giữa hai đường thẳng song song). Nhưng từ đó có thể suy ra, nhóm đường thẳng song song này nhất định có khoảng cách đều nhau. Thực tế là điều kiện B đã bổ sung và hạn chế đối với điều kiện A.

Đối với C ta có thể hiểu : Nhóm các đường thẳng song song này cũng đã cắt đường thẳng kia thành những đoạn thẳng cũng bằng nhau. Cần chú ý : những đoạn thẳng bằng nhau ấy là cùng nằm trên một đường thẳng bị cắt, chứ không có nghĩa nói đoạn thẳng trên đường thẳng thứ nhất bằng đoạn thẳng trên đường thẳng thứ hai. Kết hợp cả 3 điều kiện A, B, C ta sẽ hiểu được định lí ấy một cách hoàn chỉnh.

1.2. Phân biệt rõ điều kiện và kết luận. Các định lí, quay tắc và công thức trong toán học là một loại mệnh đề, nó được chia thành 2 phần là điều kiện và kết luận. Điều kiện là nguyên nhân, còn kết luận là kết quả được rút ra trực tiếp từ nguyên nhân. Vì các định lí, quy tắc và công thức đều là những mệnh đề chính xác (hoặc mệnh đề thật), cho nên điều kiện và kết luận trong mệnh đề không thể đảo ngược nhau. Nếu đảo thì nó sẽ không còn là mệnh đề ban đầu nữa, mà trở thành mệnh đề ngược. Nói chung có mệnh đề thuận, nhưng chưa chắc có mệnh đề ngược. Có khi mệnh đề ngược đúng, nhưng tác dụng của nó đối với mệnh đề ban đầu có thể đã đổi khác.

Ta có thể phân biệt các điều kiện và kết luận trong định lí, quy tắc và công thức thành hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất trong lời văn thường lấy dạng câu "nếu... thì ..." làm chuẩn. Rõ

ràng phần câu sau chữ "nếu" là điều kiện, phần câu sau chữ "thì" là kết luận. Ví dụ về định lí các đường thẳng song song chia hai đường thẳng ở trên là thuộc loại này.

Trường hợp thứ hai là trong câu văn không có chữ "nếu ... thì..." tức là câu không có dạng điển hình. Ví dụ : các công thức, quy tắc chỉ là 1 đẳng thức, lúc đó phạm vi khoảng xác định giá trị của những biểu thức và đại lượng bằng chữ ở phía trái dấu "=" sẽ là điều kiện, những kí hiệu bên phải dấu bằng là kết luận. Ví dụ trong đẳng thức $a^{\log_a N} = N$, "$a^{\log_a N}$ ($a > 0$ và $a \neq 1$, $N > 0$) là điều kiện, còn "=N" là kết luận.

Cũng có những dạng câu viết vắn tắt, như định lí đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên tam giác thì song song và bằng $\frac{1}{2}$ đáy tam giác". Chúng ta có thể tìm được động từ mà câu nói trên biểu thị. Ví dụ động từ diễn dạt quan hệ số lượng là : bằng nhau, bằng, lớn hơn, nhỏ hơn, không lớn hơn, ... ; những động từ biểu thị quan hệ vị trí như : song song, vuông góc. Nói chung phần ở phía trước "động từ biểu thị quan hệ" là phần điều kiện, phần sau động từ là kết luận. Có những định lí lời văn rất ngắn gọn, như "góc đối đỉnh bằng nhau", "góc bù của hai góc bằng nhau thì bằng nhau". Khi động từ của định lí đặt ở cuối câu phán đoán thì có thể đổi câu định lí thành dạng câu điển hình. Ví dụ câu "góc đối đỉnh bằng nhau" có thể đổi thành câu "Nếu có hai góc là góc đối đỉnh thì hai góc đó sẽ bằng nhau". Như thế thì phần điều kiện và kết luận rất rõ ràng.

1.3. Hãy chú ý điều kiện hạn chế. Ngoài việc nắm vững điều kiện và kết luận của định lí, quy tắc, công thức ra ta còn cần phải hết sức chú ý đến các điều kiện hạn chế sự hình thành của kết luận. Dưới đây xin giới thiệu hai quá trình giản hóa phép tính căn làm ví dụ.

Hãy đơn giản $\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$

Cách giải 1 : $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}$

$= \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} = \sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}$

$= \sqrt[6]{81-80} = 1$

Cách giải 2 : $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{-(\sqrt{5}-2)}$

$= -\sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})}.\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^2} = -\sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})}.\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}$

$= -\sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} = -\sqrt[6]{81-80} = -1$

Hai kết quả khác nhau ! Vậy kết quả nào đúng, kết quả nào sai ? Muốn thế phải so sánh hai cách giải để tìm ra chỗ khác nhau. Có lẽ bạn đã phát hiện được chỗ khác nhau là do biến đổi $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ mà ra.

Ở Cách giải 1 : $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}$

Ở Cách giải 2 : $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{-(\sqrt{5}-2)} = -\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^2}$

Cả hai cách giải đều ứng dụng tính chất cơ bản của căn thức, tức đều nâng chỉ số phép căn và số mũ của số bị căn lên hai lần. Sai sót xảy ra chính là ở đây. Những học sinh cẩn thận chắc sẽ phát hiện $(2-\sqrt{5}) < 0$, $\sqrt{5}-2 > 0$. Trong lúc đó tính chất cơ bản của căn thức là $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ chỉ khi $a \geq 0$, cũng tức là nói : chỉ khi số bị khai căn không phải là số âm thì khi ta nhân hoặc chia chỉ số căn và số mũ của số bị khai căn cho một số nguyên dương, giá trị của căn thức mới không bị thay đổi. Chú ý điều kiện $a \geq 0$ mới chính là tính chất cơ bản chỉ trong phép tính khai căn mới có. $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ là căn bậc ba âm, không hợp với điều kiện $a \geq 0$ cho nên $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \neq \sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}$ nên cách giải 1 sai.

Ví dụ khác. Trong quy tắc phép tính giới hạn, điều kiện khống chế là hai số đều phải có giới hạn, lúc đó mới có thể áp dụng các phép tính cộng, trừ, nhân, chia được. Như $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,

nên mới có $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$. Nếu không chú ý đến điều kiện số liệt $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ có giới hạn mà áp dụng bừa các quy tắc thì nhất định sẽ sai lầm. Như $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,.(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$ có học sinh giải là :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n+1)}) = \lim_{n\to\infty} n - \lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)}$$

$$= \infty - \infty = 0.$$

Giải như thế là sai vì $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)}$ đều không có giới hạn, nên hiệu của chúng không xác định. Cách giải đúng phải là :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2}.$$

Đương nhiên các điều kiện khống chế trong định lí, quy tắc và công thức vô cùng quan trọng. Vậy làm sao để có thể nhớ nó ?

Có một cách là bạn thử giả thiết nếu không có những điều kiện đó thì sẽ dẫn đến những kết quả sai như thế nào, từ đó sẽ rút ra những bài học hoặc ấn tượng sâu sắc.

Sau khi đã hiểu rõ điều kiện áp dụng của các định lí, quy tắc, công thức, lúc dùng chúng phải luôn luôn chú ý tới :

Ta xét bài tập sau : nếu $x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$ thì giá trị của x có thể là : $\frac{1}{2}$; -1 ; $\frac{1}{2}$ hoặc -1 ; $\frac{3}{2}$. Tìm xem đáp số nào đúng ?

Ta chú ý đến định lí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \ldots \frac{m}{n}$ $[(b + d + \ldots + n) \neq 0]$

$$\Rightarrow \frac{a+c+\ldots+m}{b+d+\ldots+n} = \frac{a}{b}.$$

$(b + d + \ldots + n) \neq 0$ là điều kiện để áp dụng định lí.

Vì đã biết $x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$,

Khi $a + b + c \neq 0$, ta có

$$x = \frac{a + b + c}{(b + c) + (a + c) + (a + b)} = \frac{a + b + c}{2(a + b + c)} = \frac{1}{2}$$

Khi $a + b + c = 0$ ta có $a = -(b + c)$; $b = -(a + c)$, $c = -(a + b)$ cho nên

$$x = \frac{a}{b + c} = \frac{b}{a + c} = \frac{c}{a + b} = -1$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ hay $x = -1$ là đáp số đúng ?

Ngoài ra còn phải chú ý đến các điều kiện ẩn. Ví dụ $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. $(a \geq 0, b \geq 0)$. Ở đây điều kiện $a \geq 0$ và $b \geq 0$ đã cho rõ ràng, cụ thể. Nhưng với đề bài thực hiện phép tính $\sqrt{ab}.\sqrt{\frac{a}{b}} - a$ thì lúc đó ta phải phân tích tìm ra điều kiện để phép tính có nghĩa. Ta dễ dàng thấy điều kiện đó là "$ab \geq 0$ và $b \neq 0$" hoặc ta viết thành "$a \geq 0, b > 0$" hoặc $a \leq 0, b < 0$". Do đó

$$\sqrt{ab}.\sqrt{\frac{a}{b}} - a = \sqrt{a^2} - a = \begin{cases} 0 & (a \geq 0) \\ -2a & (a < 0) \end{cases}$$

Nếu chỉ chú ý đến $a \geq 0, b > 0$ mà bỏ qua điều kiện ẩn $a \leq 0, b < 0$ thì sẽ tìm ra kết quả không đầy đủ.

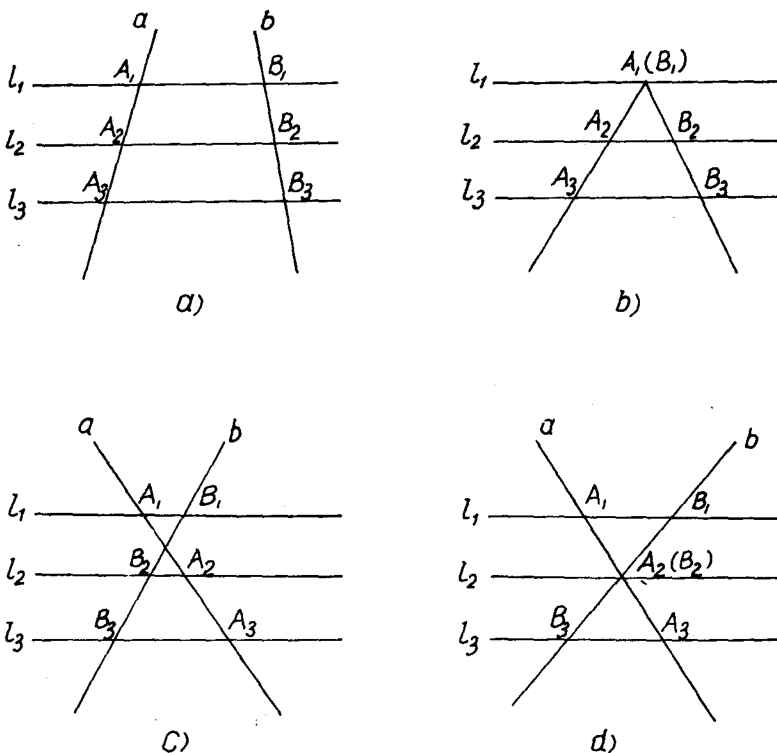
Ví dụ xét đẳng thức $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, điều kiện ẩn là $b > 0$ và $b \neq 1$. Đó là điều kiện rất dễ bỏ qua. Khi giải phương trình log, nếu bỏ qua điều kiện ẩn sẽ làm cho khoảng xác định bị thay đổi, dễ bỏ mất nghiệm.

*1.4. **Cụ thể hóa định lí, quy tắc, công thức.*** Các định lí, quy tắc, công thức toán được áp dụng với những điều kiện cụ thể và cho phép. Do đó muốn hiểu chính xác và áp dụng chúng thì phải cụ thể hóa nó ra, thành thạo nêu lên được những ví dụ thực tế.

Ví dụ tính chất căn thức bậc hai là $\sqrt{a^2} = |a|$. Khi a = –5, $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$; Khi a = x – 1, $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

Sau khi học hằng đẳng thức đáng nhớ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bạn có thể tự đặt ra một số ví dụ để khảo nghiệm, như $(2x + 1)^2 = ?$; $(\frac{1}{3}mn + p)^2 = ?$ Nếu làm đúng, chứng tỏ bạn không những đã hiểu mà còn nắm vững.

Đối với định lí các đường thẳng song song chia đường thẳng thành những đoạn thẳng bằng nhau ở trên kia, có thể cụ thể hóa bằng những hình vẽ và đưa về những trường hợp điển hình (hình 9–1).



Hình 9–1

2. Phân tích tác dụng của định lí

Mỗi định lí của toán học đều có tác dụng riêng. Làm rõ tác dụng của định lí sẽ hạn chế được những suy nghĩ mù quáng trong giải bài tập.

Làm thế nào để phân tích được tác dụng của định lí ?

2.1. Hãy nghiên cứu sự chuyển hóa từ "điều kiện" sang "kết quả".

Trên kia đã nói quan hệ giữa điều kiện và kết quả của định lí là "quan hệ nhân quả". Tác dụng của định lí là ở chỗ chuyển hóa. Do đó khi học định lí, tuyệt đối không được dừng lại ở chỗ hiểu lời văn mà phải trên cơ sở đó tìm ra mối quan hệ chuyển hóa của chúng. Dưới đây xin đưa ra mấy ví du để độc giả tự tìm ra ý nghĩa của vấn đề.

Ví dụ : Tính chất của căn bậc hai $\sqrt{a^2} = |a|$. So sánh hai vế của đẳng thức ta có thể thấy nó có ba tác dụng sau :

Thứ nhất : giá trị $\sqrt{a^2}$ là $|a|$, tức là có thể căn cứ vào tính chất này để tìm căn của một số bình phương.

Thứ hai : Tính chất đó cho ta biết giữa $\sqrt{a^2}$ và a có thể chuyển hóa, tức là từ hình thức biểu diễn này có thể đổi thành hình thức biểu diễn khác, ở đây căn bậc hai của a^2 có thể biểu diễn là $|a|$, tương tự $|a|$ có thể biểu diễn thành $\sqrt{a^2}$.

Trong giải bài tập, sự chuyển hóa về cách biểu diễn rất có ích, nó có thể giúp ta dễ dàng trong nhiều trường hợp.

Xen ví dụ sau : cho biết $x + y = 2$, $xy = -1$. Tìm $|x - y|$? Vận dụng tính chất căn bậc hai, có thể viết :

$$|x - y| = \sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{(x + y)^2 - 4xy} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

Thứ ba, nó chứng tỏ số bình phương trong dấu căn có thể đưa ra ngoài, hoặc một số không âm ở ngoài dấu căn có thể đưa vào trong căn.

Như $-x\sqrt{y}$ $(x < 0)$ có thể viết thành $\sqrt{(-x)^2y} = \sqrt{x^2y}$.

Công thức tính diện tích tam giác $S = \frac{1}{a} ab\sin C$

Điều kiện của công thức đó là : a, b là cạnh tam giác, góc C là góc kẹp giữa hai canh a, b. Lúc đó ta sẽ có kết luận diện tích hình tam giác $S = \frac{1}{2} ab\sin C$.

Tác dụng : Thứ nhất : Qua hai cạnh và góc kẹp giữa chúng của tam giác, có thể tìm được diện tích tam giác (dùng trực tiếp công thức).

Thứ hai : Có thể tìm sinC : $\sin C = \frac{2S}{ab}$ (biến đổi công thức). Qua đây ta lại phát hiện tiếp biểu thức lượng giác và đại số có thể chuyển hóa lẫn nhau.

Thứ ba : có thể tìm a hay b : $a = \frac{2S}{b\sin C}$; $b = \frac{2S}{a\sin C}$ (biến đổi công thức).

Thứ tư : tìm ab : $ab = \frac{2S}{\sin C}$ (biến đổi công thức). Dùng phương pháp trên để phân tích tác dụng của định lí, thực chất là khảo sát định lí đó. Ngoài ra thông qua làm bài tập để hiểu sâu hơn và biết được công dụng nào của định lí là chủ yếu nhất.

2.2. Tìm hiểu ứng dụng của định lí. Trên cơ sở phân tích điều kiện và kết luận của định lí, qua giải bài tập ta còn tìm hiểu ứng dụng của định lí.

Ví dụ qua phân tích quan hệ giữa nghiệm của phương trình bậc hai với các hệ số ta thấy định lí có ứng dụng sau : căn cứ vào hệ số của phương trình , không cần giải phương trình cũng có thể tìm được giá trị tổng và tích của hai nghiệm (định lí Viét). Từ đó ta có thể tiến thêm biết được định lí đảo và các ứng dụng, thể hiện dưới các mặt sau :

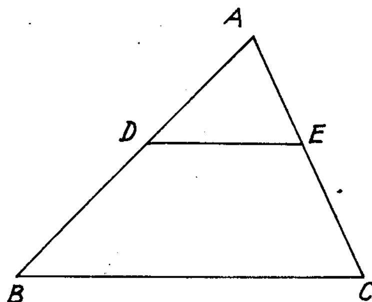
Không giải phương trình, tìm giá trị biểu thức đại số của hai nghiệm ; lập phương trình bậc hai mới ; tìm hệ số của

phương trình ; tìm khoảng cách giữa hai giao điểm của trục x với đồ thị.

Ta trở lại xét định lí các đường thẳng song song cắt hai đường thẳng.

Từ hình 9–2 ta có thể viết :

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



Hình 9–2

Qua giải bài tập, ta có thể rút ra ứng dụng của định lí ở những mặt sau :

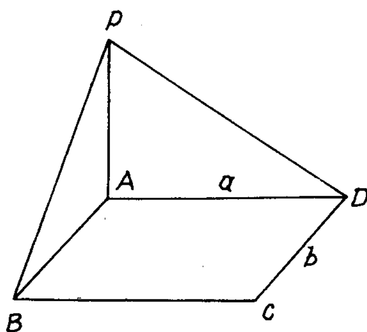
(1) Thông qua tỉ lệ thức $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, từ ba đoạn thẳng đã biết, có thể xác định đoạn thẳng thứ tư.

(2) Dùng nó để chứng minh tam giác đồng dạng. Trong hình học không gian, định lí ba đường thẳng vuông góc (trong mặt phẳng ∝ nếu có đường thẳng ⊥ với hình chiếu b' của đường thẳng b lên mặt phẳng ∝ thì a cũng vuông góc với b). Tác dụng của định lí này là để phán đoán đường thẳng a trong mặt phẳng ∝ có vuông góc với đường thẳng b nằm ngoài mặt phẳng ∝ không ?

(3) Để tìm khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng.

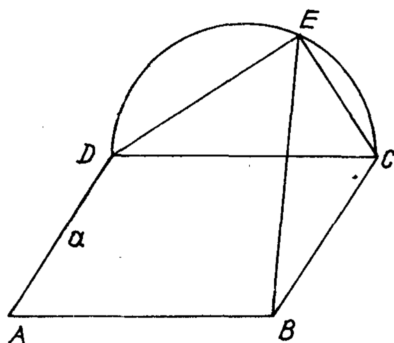
Ví dụ hình 9–3, cho biết PA vuông góc với hình chữ nhật ABCD tại A, AD = a, CD = b. Tìm khoảng cách từ điểm P đến CD và BC.

(4) Tìm khoảng cách giữa các đường thẳng khác mặt phẳng.



Hình 9–3

Ví dụ trên hình 9–4 vẽ hình vuông ABCD có cạnh a vuông góc với mặt phẳng chứa nửa cung tròn DEC có CD là đường kính. E là điểm nằm trên cung tròn, $\widehat{ECD} = 60^o$. Tìm khoảng cách của AD và BE ?



Hình 9–4

Rõ ràng khoảng cách của hai đoạn thẳng AD và BE không cùng nằm trong một mặt phẳng thì trước hết phải tìm một đoạn thẳng thứ ba đồng thời vuông góc với hai đoạn thẳng đó.

Ta biết AD ⊥ DC, BC ⊥ DC nên AD và BC đều vuông góc với mặt phẳng chứa $\frac{1}{2}$ cung tròn DEC. Do đó AD ⊥ DE.

Mặt khác CE là hình chiếu của BE trên mặt phẳng CED,

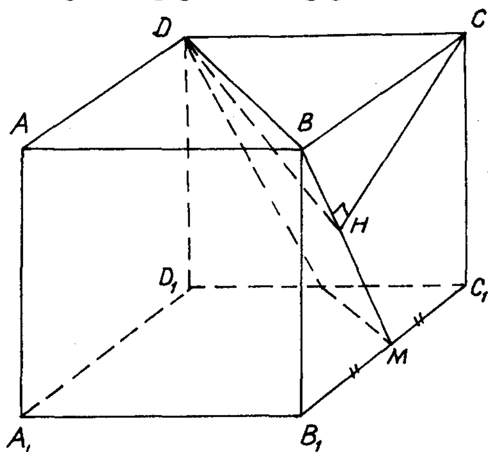
Vì $\widehat{CED} = 90^o$ nên DE ⊥ EC, tức DE vuông góc với hình chiếu của BE. Theo định lí ba đường thẳng không gian vuông góc, ta có DE ⊥ BE.

Do đó DE là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BE. DE chính là khoảng cách của hai đường thẳng đó :

$$DE = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

(5) Tính toán góc nhị diện.

Trên hình 9–5 có hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, M là điểm giữa cạnh B_1C_1. Tìm



Hình 9–5

độ lớn góc nhị diện được tạo thành bởi hai mặt phẳng chứa DBM và BMC_1C.

Để tìm góc nhị diện, trước hết ta phải vẽ góc nhị diện. Chú ý DC là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng BMC_1C, do đó trong mặt phẳng BMC_1C chỉ cần vẽ CH ⊥ BM. Nối DH. Theo định lí ba đường thẳng vuông góc ta có DH ⊥ BM. Do đó $\widehat{DHC}$ là góc nhị diện cần tìm. Ta tìm được góc nhị diện (D, BM, C) bằng $\text{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

9 - "HOẶC" VÀ "VÀ" TRONG TOÁN HỌC

Trong toán ta thường gặp nhiều câu có chữ **hoặc** và **và**. Ví dụ :

1) Nghiệm của bất đẳng thức $|x| > 3$ là $x > 3$ **hoặc** $x < -3$;

2) Đoạn thẳng nối hai điểm giữa cạnh bên của tam giác song song với đáy **và** bằng 1/2 cạnh đáy.

Trong đó mục 1) gồm hai mệnh đề đơn giản : "Nghiệm của bất đẳng thức $|x| > 3$ là $x > 3$" và "nghiệm của bất đẳng thức $|x| > 3$ là $x < -3$" hợp thành. Giữa hai mệnh đề đó dùng chữ **hoặc** nối lại.

Mục 2) gồm hai mệnh đề "đoạn nối hai điểm giữa cạnh bên của tam giác song song với đáy" và câu "đoạn nối hai điểm giữa cạnh bên bằng $\frac{1}{2}$ đáy" ghép thành, ở giữa dùng chữ **và** nối lại.

Những loại câu gồm hai mệnh đề đơn giản, ở giữa dùng liên từ lôgic **hoặc** và **và** nối lại, ta gọi là mệnh đề phức.

Nói chung, nếu dùng p và q biểu thị hai câu đơn giản thì mục 1) thuộc loại mệnh đề "p hoặc q", mục 2) là mệnh đề "p và q". Làm sao để hiểu được hai loại câu này khác nhau ?

Trên ngữ nghĩa mà nói : câu dùng **hoặc** để nối, biểu thị hai sự vật ngang nhau ; câu dùng **và** để nối biểu thị sự vật có đồng thời hai tính chất. Ví dụ mục 1) nghiệm x > 3 và x < –3 là hai sự vật ngang nhau, trong hai nghiệm phải có một nghiệm, nói cách khác "không cái này thì cái kia". Trong mục 2) "đoạn nối điểm giữa hai cạnh bên song song với đáy" và "bằng $\frac{1}{2}$ cạnh đáy" là hai tính chất có đồng thời, tức "vừa song song với đáy" vừa "bằng $\frac{1}{2}$ cạnh đáy". Đó không phải là "không cái này thì cái kia" mà là "đồng thời có".

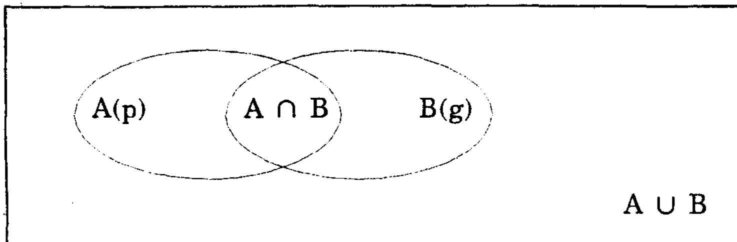
Về mặt số lượng mà nói : câu dùng chữ **hoặc** biểu thị các sự vật ngang nhau cộng lại, còn câu dùng **và** biểu thị một sự vật có nhiều tính chất.

Từ ý nghĩa tập hợp mà nói : câu dùng chữ **hoặc** biểu thị tập hợp tất cả các tính chất "của tập hợp A có tính chất p" với "tập hợp B có tính chất q". Còn câu dùng chữ **và** biểu thị giao các tính chất của hai tập hợp A và B. Ta có thể biểu diễn sự khác nhau bằng hình vẽ.

Tập hợp A ↔ tính chất p ; tập hợp B ↔ tính chất q.

$A \cup B$ ↔ tính chất p hoặc tính chất q

$A \cap B$ ↔ tính chất p và tính chất q



Hình 10–1

Cũng có trường hợp hai chữ **hoặc** và **và** bị bỏ qua không dùng đến.

3) x, y là số thực ;

4) x và y là số thực ;

5) $|x - 3| \leqslant 1$

6) AB $\underline{\underline{//}}$ CD

Nếu dùng **hoặc** và **và** thì các câu trên có thể viết :

3) "x là số thực" và "y là số thực" ;

4) "x là số thực" và "y là số thực" ;

5) "$|x - 3| < 1$" hoặc "$|x - 3| = 1$" ;

6) "AB // CD" và "AB = CD".

Phân tích đặc điểm bốn câu trên ta thấy rõ : có một số câu dùng dấu "," để nối hai mệnh đề, có một số câu dùng chữ **và**, vậy "," và chữ **và** khi nào biểu thị là **hoặc** và **và** ?

Điều đó phải căn cứ trường hợp cụ thể mà phân tích. Ví dụ "$a > b$, $b > c$" dấu "," ở đây có nghĩa **và**, tức "$a > b$ và $b > c$". Còn "$a = 0$, $a = 1$", dấu "," ở đây là **hoặc**, tức "$a = 0$ hoặc $a = 1$".

Thử phân tích xem chữ **hoặc** và **và** dưới đây dùng đúng hay sai.

7) "$-3 < x < 3$" biểu thị "$x > -3$ hoặc $x < 3$".

8) "Nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ là $x \leqslant -1$ và $x \geqslant 3$"

Giải thích : 7) và 8) đều không đúng. Vì "$x > -3$ hoặc $x < 3$" thực chất là nói "x là số thực bất kì", tức $x \in R$; còn số thực mà "$x \leqslant -1$ và $x \geqslant 3$" muốn biểu thị là không tồn tại, tức $x \in \phi$.

Khi học, trên cơ sở hiểu đúng sự khác nhau giữa **hoặc** và **và**, ngoài việc biết dùng nó đúng còn cần phải biết những vấn đề có liên quan với hai từ đó.

Ví dụ 1. Giải hệ bất đẳng thức $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x > 7 \end{cases}$

Giải : $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3) > 0 \\ x > 3\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > 3 \\ x > 3\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 3\frac{1}{2}$

Thuyết minh :

Hệ bất phương trình $\begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > 3 \\ x > 3\frac{1}{2} \end{cases}$ biểu thị $\begin{cases} x < -1 \\ x > 3\frac{1}{2} \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x > 3 \\ x > 3\frac{1}{2} \end{cases}$.

Nói chung $\begin{cases} x < a \text{ hoặc } x > b \\ \text{và } x > c \end{cases}$

tức $\begin{cases} x < a \text{ hoặc } x > b \\ x > c \end{cases}$ tức $\begin{cases} x < a \\ x > c \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x > b \\ x > c \end{cases}$.

Ví dụ 2. Giả thiết khoảng xác định của hàm số f(x) là $0 < x < 1$. Tìm khoảng xác định của hàm số $f(x^2 - 1)$.

Giải : Từ đề ra ta biết $0 < x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > 1 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < -1$ hoặc

$1 < x < \sqrt{2}$

Cho nên khoảng xác định của $f(x^2 - 1)$ là $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\log_{x+1}(2x^2 + 3x - 5) = 2$

Giải. Nghiệm của phương trình $\log_{x+1}(2x^2 + 3x - 5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 = (x+1)^2 \\ 2x^2 + 3x - 5 > 0 \\ x + 1 > 0 \text{ và } x + 1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ (2x+5)(x-1) > 0 \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ hoặc } x = -3 \\ x < -\frac{5}{2} \text{ hoặc } x > 1 \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x < -\frac{5}{2} \text{ hoặc } x > 1 \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ x < -\frac{5}{2} \text{ hoặc } x > 1 \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x < -\frac{5}{2} \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ x > 1 \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ x < -\frac{5}{2} \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ x > 1 \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Thuyết minh : Hệ bất phương trình $\begin{cases} x = 2 \text{ hoặc } x = -3 \\ x < -\frac{5}{2} \text{ hoặc } x > 1 \\ x > -1 \text{ và } x \neq 0 \end{cases}$

là vấn đề tương quan giữa "hoặc" và "và" khá phức tạp. Dùng phương pháp tập hợp để giải quyết loại vấn đề này là "trước hết tìm từng tập giao, sau đó mới kết hợp chúng lại".

Nói chung $\begin{cases} x > a \text{ hoặc } x < b \\ x > c \text{ hoặc } x < d \\ x > e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x > c \\ x > c \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > a \\ x < d \\ x > e \end{cases}$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x < b \\ x > c \\ x > e \end{cases} \qquad \text{hoặc } \begin{cases} x < b \\ x < d \\ x > e \end{cases}$$

10 - VƯỢT QUA CHỖ NGOẶT

Trong cuộc sống, có lẽ bạn đã nhiều lần có cảm giác sau : khi xe ôtô vượt nhanh qua chỗ ngoặt, hành khách trong xe bị nghiêng đảo người, rất khó chịu, đó là do tác dụng của quán tính. Trong học tập cũng có quán tính. Khi ta học hết phần trước, chuyển sang phần sau, tuy nội dung đã thay đổi, cỗ xe tư duy đã chuyển sang quỹ đạo mới, nhưng thói quen và phương pháp tư duy trước đây của ta vẫn còn chưa thay đổi, thường làm cho cỗ xe tư duy lệch quỹ đạo mới. Tất nhiên tập quán hoặc tính thích ứng sẽ thay đổi dần theo quá trình học tập, nhưng phải trải qua một thời gian. Để học tốt chương mới, ta cần cố gắng sớm thích ứng với nội dung mới để vượt qua bước ngoặt một cách mau chóng và thuận lợi.

Toán phổ thông có bốn chỗ ngoặt lớn :

1) Từ số học chuyển sang đại số ;

2) Từ đại số sang hình học ;

3) Từ toán các đại lượng là hằng số sang toán có các biến số ;

4) Từ hình học phẳng sang hình học không gian.

Tất nhiên trong từng phần ngoặt lớn lại có các bước ngoặt nhỏ. Lấy từ số học chuyển sang đại số làm ví dụ, trong đó có ba chỗ ngoặt quan trọng : Thứ nhất là từ các phép tính số học (số nguyên và phân số) chuyển sang số hữu tỉ ; thứ hai, từ dùng con số để biểu thị một số chuyển sang dùng chữ cái biểu thị một số ; thứ ba, từ số hữu tỉ sang số thực. Muốn học tốt toán, vừa đòi hỏi vượt qua các chỗ ngoặt lớn, vừa phải vượt tốt các chỗ ngoặt nhỏ.

Vậy, làm thế nào để thuận lợi vượt qua các chỗ ngoặt ?

1. Phải nắm được đặc điểm của phần kiến thức mới

Các kiến thức mới trong toán phổ thông đại thể được hình thành theo ba loại phương thức. Loại thứ nhất là trên cơ sở kiến thức cũ thêm một số nhân tố mới để hình thành kiến thức mới. Ví dụ : trên cơ sở toán học ở cấp một, đưa vào những số ngược nhau làm nảy nở khái niệm số âm và số dương. Trong phương trình bậc nhất một ẩn số đưa thêm vào một ẩn số nữa thành phương trình hai ẩn số. Loại thứ hai là thay đổi kết cấu kiến thức cũ. Ví dụ phép khai căn là một khái niệm mới được đưa ra trên cơ sở phép tính ngược của phép tính lũy thừa. Loại thứ ba là xây dựng một cấu trúc kiến thức mới. Ví dụ các kiến thức về phương trình hoàn toàn khác với các kiến thức về số học. Phương pháp nghiên cứu và nội dung của phần giới hạn của số liệt khác xa với phần hàm số. Nó nghiên cứu lí luận về một loại hàm số đặc biệt có biến số n là số nguyên dương, và khi $n \to \infty$ thì hàm số đó biến đổi ra sao.

2. Cần suy nghĩ và giải quyết vấn đề theo cách tư duy mới

Sau khi đã hiểu rõ đặc điểm của phần kiến thức mới, phải cố gắng dựa theo những khái niệm mới, phương pháp mới, tức là theo phương thức tư duy mới để suy nghĩ và giải quyết vấn đề, luôn chú ý khắc phục những ảnh hưởng xấu của nếp tư duy cũ, nếu không sẽ gặp phải sai lầm có tính nguyên tắc.

Đầu tiên ta thử bàn về cách tư duy đại số. Xét hai ví dụ dưới đây xem giải sai chỗ nào.

1) So sánh a và -a cái nào lớn hơn.

2) Giải phương trình $\frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$.

Giải : 1) a > -a

2) Từ đề bài ta được 1 - x = x - 1 ; x = 1 là nghiệm. Dễ dàng thấy rằng, bài 1) giải sai ở chỗ xem a là số dương, -a là âm. Đây

là do ảnh hưởng của thói quen dùng chữ số để biểu thị số, xem số có dấu "+" là số dương, như +3 ; còn số có dấu "–" xem là số âm, như –1 chẳng hạn. Như thế là đã quên mất chữ cái biểu thị số bất kì, a có thể là số dương, số không hoặc số âm, còn –a là số ngược lại với a.

Đề thứ hai giải sai ngay ở bước đầu tiên. Từ $\frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$ rút ngay ra $1 - x = x - 1$. Vì sao sai ? Là vì bị ảnh hưởng bởi "hai phân số bằng nhau, nếu tử số bằng nhau thì mẫu số cũng bằng nhau". Phán đoán này chỉ đúng với điều kiện tử số khác không. Ở đây tử số của hai vế trong phương trình là biến số x, giá trị của nó chưa xác định, nên không loại trừ khả năng nó bằng không. Do đó ta không có đủ lí do để rút ra kết quả $1 - x = x - 1$. Thực tế là phương trình có 1 nghiệm $x = 0$, lúc đó mẫu số khác nhau.

Khá nhiều học sinh mới lên cấp hai, khi học những bài toán ứng dụng cách lập phương trình để giải, vẫn chịu ảnh hưởng thói quen phương pháp tính số. Ví dụ với đề : Biết tổng hai số bằng 15, số này lớn hơn số kia 5. Tìm mỗi số ?

Có học sinh giải như sau : Giả thiết số nhỏ là x, ta có phương trình

$$x = (15 - 5) : 2 \qquad (1)$$

$$x = 5$$

Do đó số lớn bằng : $x + 5 = 5 + 5 = 10$.

Ta thấy, tuy (1) là phương trình, nhưng thực chất đây vẫn là cách giải của số học. Là vì vế phải của (1) : $(15 - 5) : 2$ thực tế là phép tính tổng hợp để tìm số nhỏ. Nó chưa "dịch" được những mối quan hệ bằng nhau theo điều kiện của bài toán sang ngôn ngữ toán học. Nói cách khác là chưa làm theo cách tư duy của loại toán ứng dụng phương trình để giải. Vậy làm thế nào mới gọi là cách giải đại số ?

Cách tư duy của loại đề dùng lập phương trình để giải là tìm ra những mối quan hệ bằng nhau theo điều kiện của đề bài, "phiên

dịch" những quan hệ bằng nhau được tả bằng lời đó thành ngôn ngữ kí hiệu, sau đó giải phương trình, rồi kiểm nghiệm để tìm ra nghiệm. Theo cách tư duy này, ta nên nêu rõ quá trình tư duy ra :

Giả thiết số lớn là x, số nhỏ là y.

	Ngôn ngữ đề bài	Ngôn ngữ kí hiệu
Cho biết :	(1) Tổng hai số là 15	$x + y = 15$
Điều kiện :	(2) x lớn hơn y là 5	$x - y = 5$
Cần tìm :	số lớn, số nhỏ	$x = ?$; $y = ?$

Do đó tự nhiên lập được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Nếu bạn chỉ giả thiết một ẩn số thì phải cho một mối quan hệ bằng nhau nào đó trong điều kiện biểu thị thành một ẩn số khác.

Giả thiết số nhỏ là x thì số lớn là x + 5 [điều kiện (2)] căn cứ điều kiện (1) lập phương trình

$$(x + 5) + x = 15.$$

Tất nhiên cũng có thể làm như sau :

Giả thiết số nhỏ là x thì số lớn là 15 – x [điều kiện (1)].

Do đó, theo điều kiện (2) ta lập được phương trình

$$(15 - x) - x = 5.$$

Dùng chữ cái để biểu thị số, dùng các phép tính và phương trình có chứa các đại lượng bằng chữ để giải toán, đó chính là phương thức tư duy đại số. Song, phải hết sức lưu ý phạm vi lấy giá trị của đại lượng bằng chữ. Trong đầu cần luôn có khái niệm "biến số". Chỉ cần lơ là sẽ xẩy sai sót ngay.

Dưới đây ta thử bàn về cách tư duy hình học.

Kết hợp suy lí với hình vẽ là phương thức tư duy đặc thù của hình học. Giải quyết các bài toán hình học vừa phải bám sát hình, vừa phải thoát li khỏi ảnh hưởng trực quan từ hình. Phàm những điều không có trong giả thiết, cũng chưa qua lí luận để chứng minh ra được thì đều không được dựa vào trực quan hình học để kết luận mà phải chứng minh làm rõ. Điều này không những rất quan trọng đối với học sinh mới học hình học, mà đối với học sinh khá cũng cần luôn chú ý.

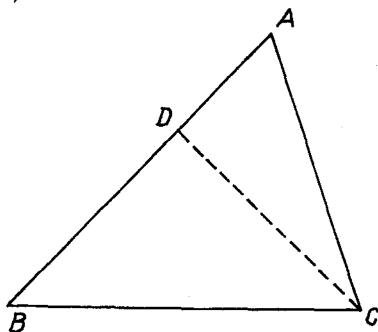
Ví dụ chứng minh định lí "cạnh lớn tương ứng với góc lớn", có học sinh đã làm như sau :

Cho biết : có tam giác ABC như hình 11–1, trong đó AB > AC.

Chứng minh : $\widehat{C} > \widehat{B}$.

Giải. Qua điểm C vẽ CD cắt AB ở D sao cho $\widehat{DCB} = \widehat{B}$, vì CD ở trong $\widehat{ACB}$, nên $\widehat{C} > \widehat{DCB}$, do đó $\widehat{C} > \widehat{B}$.

Cách chứng minh này có vẻ không có chỗ nào phản bác được, nhưng thực ra là sai. Vì sao ? Ở bước thứ hai trong chứng minh " vì CD ở trong góc $\widehat{ACB}$" vừa không phải là điều kiện cho biết, vừa không phải do chứng minh mà có mà là do sau khi vẽ CD đã từ hình trực giác thu được.



Hình 11–1

Tất nhiên khi mới bắt đầu học chứng minh hình học, vì chưa quen với phương thức tư duy hình học, có thể sẽ lợi dụng những điều từ hình vẽ trông rất "tự nhiên" một cách không tự giác. Nếu thế phải luôn chú ý tự hỏi mình có phạm sai lầm trực giác chỗ nào không ? Chỉ có như thế mới dựa vào hình vẽ một cách đúng đắn được.

Làm thế nào để có thể nhanh chóng làm quen với chứng minh hình học ? Muốn thế phải chăm chú học các định lí và quá trình

chứng minh của các bài trong sách, làm rõ căn cứ của từng bước chứng minh. Thứ hai là khi làm bài tập phải có căn cứ của từng bước. Lúc mới bắt đầu học, nếu sau mỗi bước đều chú thích rõ lí do càng tốt.

Làm thế nào để tự đánh giá được mình đã vượt qua bước ngoặt ? Muốn vượt qua bước ngoặt đòi hỏi phải có một thời gian nhất định. Khi đã học được một thời gian (ví dụ một tuần, hai tuần hoặc lâu hơn) có được một số kiến thức mới, có thể tự cho điểm theo ba mặt dưới đây. Nếu tổng số điểm $\geqslant 10$ là đã vượt qua bước ngoặt.

1. Bạn đã hiểu được bao nhiêu về đặc điểm kiến thức mới ?

Không hiểu	Hiểu ít	Hiểu nhiều	Hiểu tất cả
1	2	3	4

2. Trong giải bài tập thường mắc sai lầm về khái niệm không ?

Thường sai	Có lúc sai	Không sai
1	3	5

3. Mức độ thành thạo trong việc dùng kiến thức mới để giải bài tập

Không thành thạo, phải tra sách	Không xem sách, tương đối thành thạo	Rất thành thạo
2	4	6

11. NẮM VỮNG PHƯƠNG PHÁP QUAN TRỌNG HƠN THUỘC LÍ THUYẾT

Rất nhiều học sinh thường rất coi trọng thuộc định lí, công thức mà không chú ý nắm vững quá trình và phương pháp chứng minh các định lí, công thức đó. Kết quả đi ngược lại mong muốn,

định lí, công thức thì thuộc làu nhưng làm bài tập là sai. Quả thật, việc giải bài tập gắn liền với định lí, quy tắc, công thức, vì đó là những phần quan trọng trong hệ thống các khái niệm của toán học, là công cụ để suy ra những kiến thức mới và để giải toán. Song chỉ nhớ được những công thức, định lí, quy tắc không có nghĩa là sẽ giải được bài tập, mà còn có vấn đề phải nắm vững phương pháp và kĩ năng giải. Có thể ví hệ thống khái niệm toán như là một cây khái niệm, phần gốc là một số định nghĩa, nguyên lí hoặc định lí. Từ những định nghĩa hoặc định lí đó phát triển, suy luận thành những định lí, quy tắc hoặc công thức mới để hình thành cành lá của cây. Do đó giữa các định lí, quy tắc hoặc công thức không phải không có mối quan hệ với nhau như các khúc gỗ sắp lại mà là thông qua những móc xích logic để liên kết lại với nhau. Cái tinh túy của toán học không chỉ là các định nghĩa, nguyên lí, quy tắc và công thức cấu tạo thành hệ thống khái niệm mà còn bao gồm một loạt các phương pháp tư duy và phương pháp toán học để phát hiện, chứng minh các định lí, quy tắc và công thức. Hiểu rõ ngọn nguồn và các khía cạnh của định lí, quy tắc và công thức không những giúp ích cho việc nắm vững các định lí mà còn biết được phương pháp làm bài tập, biết được phải tư duy ra sao. Cho nên cần phải coi trọng học các quá trình phân tích và quá trình phân tích và quá trình suy luận. Ví dụ ta xét đề sau :

Cho biết : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Tìm giá trị : $\frac{y+z-x}{x-y+z}$?

Có một cách giải là trực tiếp ứng dụng định lí tỉ lệ thức bằng nhau.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ \frac{x}{2} = \frac{-y}{-3} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y+z-x}{4+3-2} = \frac{z}{4} \\ \frac{x-y+z}{2-3+4} = \frac{z}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y+z-x}{5} = \frac{z}{4} \\ \frac{x-y+z}{3} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{y+z-x}{x-y+z} = \frac{5}{3}$$

Vậy còn có cách gì ngắn gọn hơn không ? Ta nhớ lại quá trình chứng minh định lí tỉ lệ thức bằng nhau.

Giả thiết $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = ... = \frac{m}{n} = k$ ($k \neq 0$, $b + d + ... + n \neq 0$)

Vậy $a = bk$, $c = dk$, ..., $m = nk$. Trực tiếp thay vào có :

$$\frac{a+c+...+m}{b+d+...+n} = \frac{bk+dk+...+nk}{b+d+...+n} = \frac{(b+d+...+n)k}{b+d+...+n} = k = \frac{a}{b}$$

Như vậy, định lí đã được chứng minh. Cách chứng minh này rất đẹp, nó dùng 1 số $k \neq 0$ để biểu thị các tỉ lệ thức, lập mối quan hệ bằng nhau giữa tỉ lệ trước và sau, rồi cho $a = kb$, sau đó dùng b biểu thị a.

Do đó, ta có thể không dùng kết quả của định lí tỉ lệ mà dùng phương pháp chứng minh định lí để giải :

Giả thiết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k \neq 0$, ta có $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 4k$. Thay vào được :

$$\frac{y+z-x}{x-y+z} = \frac{3k+4k-2k}{2k-3k+4k} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}$$

Rõ ràng phương pháp này ngắn gọn hơn nhiều ! Trong rất nhiều vấn đề về tỉ lệ bằng nhau, nói chung đều giả thiết tỉ lệ thức bằng số $k \neq 0$ nào đó. Rất lí thú là định lí về sin có tỉ lệ : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. Kinh nghiệm chứng tỏ : khi giải quyết một vấn đề nào đó, áp dụng cách chứng minh của định lí nhiều khi còn tốt hơn cả áp dụng kết quả của định lí.

Ví dụ tìm tổng dãy số liệt trong đại số ở cấp ba cũng là một nội dung quan trọng. Kết luận của công thức tìm tổng cấp số nhân dĩ nhiên là rất quan trọng, nhưng tác dụng của phương pháp tìm ra công thức cũng cần hết sức lưu tâm. Ta biết

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$ ($q \neq 1$) được tìm ra như sau :

$$S_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-1} \quad (1)$$

$$\text{nên } qS_n = a_1 q + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \quad (2)$$

Lấy (1) – (2) được : $(1 - q)S_n = a_1 - a_1 q^n$

Khi $q \neq 1$ ta có : $S_n = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$.

Cách nghĩ cơ bản của nó là ở chỗ lấy S_n trừ đi qS_n, theo thói quen gọi đó là "cách trừ đi q lần". Phương pháp này không những phù hợp cho cách tìm tổng cấp số nhân mà cũng thích hợp cho cả tìm tổng và tích của cấp số cộng.

Ví dụ : Tìm tổng $1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.

Giả thiết : $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$ (1)

thì $xS_n = x + 2x^2 + ... + (n-1)x^{n-1} + nx^n$ (2)

Cho (1) – (2) được $(1-x)S_n = 1+x+x^2+...+x^{n-1}-nx^n$.

Khi $x \neq 1$, có : $S_n = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

Khi $x = 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Nếu chú ý đầy đủ đến quá trình, hiểu được cách tính và phương pháp còn giúp tìm ra được khi bị quên công thức. Ví dụ quên công thức khai triển của hằng đẳng thức $(a + b)^3$ nhưng còn nhớ được nó là do (a + b) nhân với nhau ba lần mà ra thì sẽ rất nhanh tìm được :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+b^2+2ab)(a+b)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Nếu quên công thức tìm nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn số nhưng còn nhớ cách chứng minh của nó thì nhất định sẽ tìm ra.

Một ví dụ khác, ta quên công thức $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, nhưng nếu còn nhớ được $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ thì ta có thể biến đổi được

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \text{ tức } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Trong toán học, có một số quy tắc hoặc định lí có chung cách chứng minh, cách chứng minh của bốn phép tính về log tương tự nhau, hoặc định lí về hình chiếu trong hình học, cách chứng minh đều đưa về vấn đề tam giác tương tự. Do đó nắm được cách suy diễn của chúng thì có thể suy ra nhiều kết quả.

Tóm lại, học định lí, quy tắc và công thức vừa phải coi trọng kết luận, vừa phải chú ý quá trình. Đương nhiên điều đó không có nghĩa phải nhớ phương pháp chứng minh của mỗi định lí mà phải hiểu được ngọn nguồn của chúng. Đối với những định lí, công thức quan trọng, nên nhớ và nắm vững các[illegible]ứng minh.

12 - NẮM VỮNG PHƯƠNG PHÁP TƯ DUY KHOA HỌC

Đề toán muôn hình vạn trạng. Có những đề bài rắc rối, xem xong hoa cả mắt. Tục ngữ có câu : mỗi chìa khóa chỉ mở một ổ khóa. Tuy ta không thể tạo ra được chìa khóa vạn năng, nhưng

nếu nắm vững nguyên lí làm chìa khóa thì sẽ có thể làm ra chìa khóa cho ổ khóa nào đó. Giải toán thực chất là một quá trình tư duy toán học. Nếu ví giải bài tập với việc mở khóa thì phương pháp tư duy chính là nguyên lí làm chìa khóa. Nắm được phương pháp tư duy khoa học để giải toán thì đỡ đi đường vòng, có thể nhanh chóng tìm ra cách giải đúng đắn. Học được phương pháp suy nghĩ cũng tức là nắm được phương pháp cơ bản nhất của việc học toán.

Phương pháp tư duy toán cơ bản gồm có ba cách : phép tổng hợp và phép phân tích, phép quen thuộc hóa (đưa về dạng quen thuộc) và phép biến đổi vấn đề.

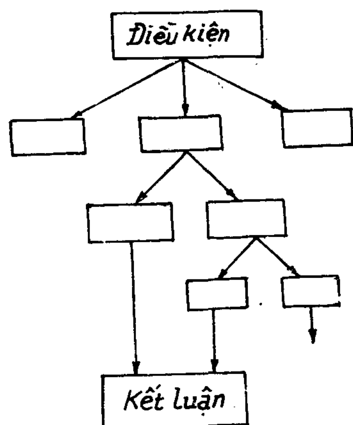
1. Phép tổng hợp và phép phân tích

Mọi người đều biết, đề toán gồm hai phần : phần dữ kiện và phần cần tìm hoặc cần chứng minh.

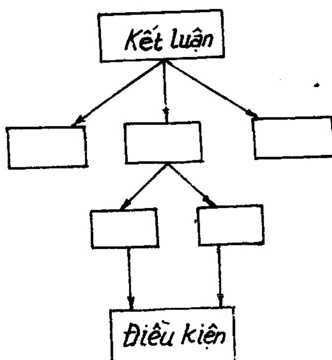
Cho dù gặp loại đề như thế nào, trước hết ta cần phải phân tích các dữ kiện, sau đó xuất phát từ các dữ kiện này mà vận dụng những định nghĩa, nguyên lí, định lí đã học, từng bước suy diễn, tính toán cho đến khi tìm được kết quả, tức là từ "cái đã biết" tìm "cái suy ra" để cuối cùng tìm được "cái cần tìm". Đó chính là phương pháp tư duy tổng hợp.

Trong giải bài tập cũng có lúc gặp phải trường hợp : trong quá trình suy diễn, giữa chừng gặp khó khăn lại chuyển sang xuất phát từ kết luận. Giả thiết kết quả đó tồn tại để tìm điều kiện dẫn đến nó là gì ? Cứ từng bước truy ngược như thế cho đến khi gặp được các dữ kiện đã biết, tức là từ "cái cần tìm" từng bước tìm được "cái đã biết". Nó ngược với chiều của phương pháp tư duy tổng hợp, gọi là phương pháp tư duy phân tích.

Từ trên (điều kiện) tìm xuống (kết luận) có người đã ví phương pháp tư duy tổng hợp một cách hình ảnh như cái cây đảo ngược. Sơ đồ được vẽ trên hình 13-1.



Hình 13–1



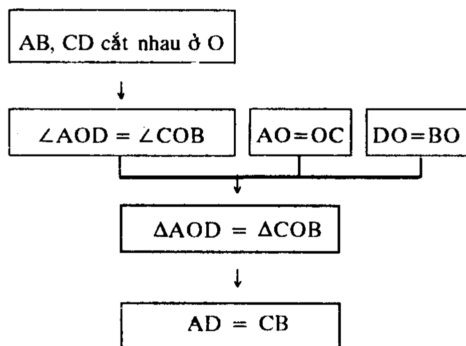
Hình 13–2

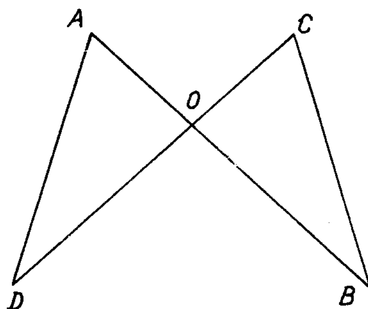
Tương tự, cũng có thể ví phương pháp tư duy phân tích với cái cây mọc ngược, chẳng qua gốc cây không phải là "điều kiện" mà là "kết luận", như hình vẽ 13–2.

Ví dụ : AB và CD cắt nhau ở O, biết OA = OC, OB = OD.

Chứng minh AD = CB. (hình 13–3).

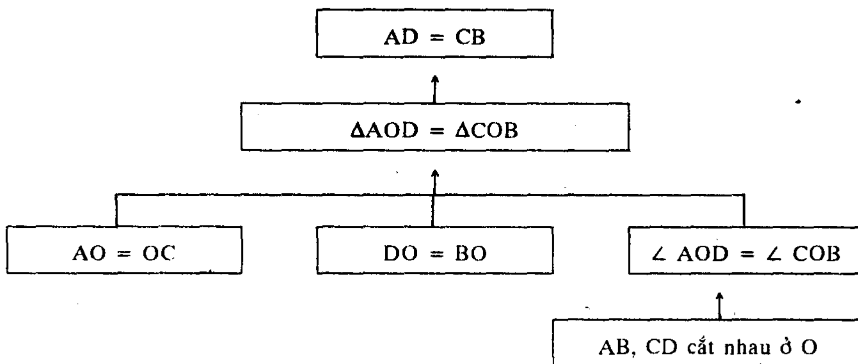
Phương pháp tổng hợp :





Hình 13–3

Phương pháp phân tích :



Dưới đây dùng phương pháp tổng hợp ghi lại quá trình chứng minh :

vì AB, CD cắt nhau ở O, nên $\widehat{AOD} = \widehat{COB}$ (góc đối đỉnh).

vì AO = CO, DO = BO, nên ΔAOD = ΔCOB (c.g.c)

Do đó AD = CB.

Phép tổng hợp không những là phương pháp tư duy hay được dùng trong hình học phẳng và hình học không gian mà còn là phương pháp tư duy chủ yếu để chứng minh các hằng đẳng thức và bất đẳng thức trong đại số. Ngay cả khi dùng phép quy nạp để chứng minh những mệnh đề có liên quan với số tự nhiên, trong quá trình chứng minh mệnh đề, khi n = k + 1 được thành lập cũng thường dùng phép tổng hợp.

Khi dùng phép tổng hợp để giải đề phức tạp, có khi ta cảm thấy như bị bó chân tay, không biết nên bắt đầu từ đâu. Để nâng cao hiệu quả dùng phép tổng hợp, phải cố tìm cho được điểm liên kết giữa điều kiện đã cho và mục tiêu cần tìm.

Ví dụ : Chứng minh $\sqrt{a}-\sqrt{a-1} < \sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ $(a \geq 3)$.

Điều kiện chứng minh đã biết là $\sqrt{a} - \sqrt{a-1}$ và $\sqrt{a-2} - \sqrt{a-3}$. Rõ ràng hướng suy nghĩ ở đây không rõ, nên

phải gắng tìm cho ra điểm nối giữa kết quả và điều kiện. Muốn thế, ta chú ý đến hai vế trái và phải của bất đẳng thức đều là hiệu của hai căn, nên ta có thể biến đổi chúng thành những phân thức thích hợp :

$$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}};\ \sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}=\frac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}}.$$

Quan sát kết quả biến đổi, ta thấy tử số là 1, mẫu số là tổng của hai căn. Vì $a > a - 1 > a - 2 > a - 3$, nên $\sqrt{a}+\sqrt{a-1} > \sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}$. Vấn đề lập tức giải quyết xong.

Qua đó ta thấy rõ, phân thức hóa một cách thích hợp hiệu hai căn thức của hai vế trái phải của bất đẳng thức chính là điểm liên kết giữa điều kiện và mục tiêu cần tìm. "Nhằm vào mục tiêu, nghĩ đến điều kiện, tìm ra điểm liên kết" đó là một kinh nghiệm thành công áp dụng phép tổng hợp. Khi dùng phép phân tích, vì số điều kiện để kết luận được thành lập rất có hạn nên dễ tìm ra những tri thức có liên quan với kết luận. Cho nên khi giải bài tập, sau khi làm rõ điều kiện và kết luận, thử dùng phép phân tích tìm con đường suy nghĩ, sau đó dùng phép tổng hợp viết ra quá trình suy lí, hoặc trực tiếp dùng phép phân tích để thuật lại quá trình chứng minh. Xin xem ví dụ dưới đây.

Ta vẫn xét ví dụ bất đẳng thức ở trên, dùng phép phân tích để chứng minh : $\sqrt{a} - \sqrt{a-1} < \sqrt{a-2} - \sqrt{a-3}$.

$$\Leftarrow \sqrt{a} + \sqrt{a-3} < \sqrt{a-1} + \sqrt{a-2}$$

$$\Leftarrow (\sqrt{a} + \sqrt{a-3})^2 < (\sqrt{a-1} + \sqrt{a-2})^2$$

$$\Leftarrow 2a - 3 + 2\sqrt{a(a-3)} < 2a - 3 + 2\sqrt{(a-1)(a-2)}$$

$$\Leftarrow \sqrt{a(a-3)} < \sqrt{(a-1)(a-2)}$$

$$\Leftarrow a(a-3) < (a-1)(a-2)$$

$$\Leftarrow a^2 - 3a < a^2 - 3a + 2$$

$$\Leftarrow 0 < 2$$

Rõ ràng 0 < 2 là đúng. Do đó $\sqrt{a}-\sqrt{(a-1)} < \sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$

Cần chỉ rõ rằng khi dùng phép phân tích để giải bài tập phải chú ý hướng của mũi tên "⇐", nó biểu thị "Điều kiện đủ để cho kết luận được thành lập là ..." Nếu không dùng kí hiệu "⇐", cũng có thể dùng lời để diễn đạt : "muốn cho ... thành lập, chỉ cần ... được thành lập". Tóm lại, trên quan hệ lôgic mà nói, đây không phải là tìm điều kiện đủ, cũng không phải tìm điều kiện cần mà là tìm đầy đủ các điều kiện, từng bước từng bước từ "kết quả mò mẫm ra nguyên nhân". Dưới đây bàn về những điều cần chú ý khi dùng phép phân tích.

1) Không được lấy điều kiện cần chứng minh làm điều kiện đã biết để suy lí. Ví dụ muốn chứng minh A > B thì phải chứng minh A – B > 0. Ở đây không thể lấy A – B > 0 làm điều kiện đã biết để lấy đó làm căn cứ suy diễn, nếu không sẽ mắc sai lầm về lôgic.

Ví dụ 1. Trong tam giác ABC, a, b, c là cạnh đối của các góc trong $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ và thỏa mãn lga – lgcosA = lgb – lgcosB = lgc – lgcosC (*). Chứng minh đó là tam giác đều.

Có học sinh chứng minh như sau :

Muốn chứng minh tam giác ABC đều, chỉ cần chứng minh

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$; a = b = c, có thể giả thiết a = b = c = 1

chỉ cần chứng minh $\cos A = \cos B = \cos C = \frac{1}{2}$ (1)

$$\lg a = \lg b = \lg c = 0 \quad (2)$$

Đem (1) và (2) thay vào biểu thức có dấu (*)

$$\lg a - \lg\cos A = \lg b - \lg\cos B = \lg c - \lg\cos C \quad (3)$$

Biểu thức (3) hiển nhiên thành lập, các bước ở trên có thể làm ngược được, nên vấn đề được chứng minh.

Sai lầm ở đây là học sinh đó đã lấy các điều kiện (1), (2) cần chứng minh làm điều kiện đã biết, suy ra (1), (2) phù hợp với điều kiện đã biết (*), lại còn khẳng định "các bước ở trên có thể làm ngược được". Thực tế là bạn đó chưa hề chứng minh được điều gì, vì mấu chốt của vấn đề là làm sao từ các điều kiện (*) suy ra $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ hoặc $a = b = c$. Không thể khẳng định "các bước trên làm ngược được" khi chưa có căn cứ.

Cách giải đúng là :

$\Leftarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftarrow tgA = tgB = tgC > 0$

$\Leftarrow \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C} > 0$

$\Leftarrow \frac{2R\sin A}{\cos A} = \frac{2R\sin B}{\cos B} = \frac{2R\sin C}{\cos C} > 0$ (trong đó R là bán kính của vòng tròn ngoại tiếp của tam giác ABC).

$\Leftarrow \frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C} > 0$, $\cos A, \cos B, \cos C > 0$

$\Leftarrow \lg \frac{a}{\cos A} = \lg \frac{b}{\cos B} = \lg \frac{c}{\cos C}$

$\Leftarrow \lg a - \lg\cos A = \lg b - \lg\cos B = \lg c - \lg\cos C$.

Kết quả này phù hợp với điều kiện (*). Như vậy chứng minh xong.

Nghĩ xem, đề bài dưới đây dùng phép phân tích chứng minh đã đúng chưa ?

Nếu $(z - x)^2 - 4(x - y)(y - z) = 0$. Chứng minh x, y, z lập thành cấp số cộng ?

Muốn chứng minh x, y, z thành cấp số cộng chỉ cần chứng minh $2y = x + z$ (1).

Đem (1) thay vào $(z - x)^2 - 4(x - y)(y - z) = 0$ (2)

Vế trái bằng $(z - x)^2 - (2x - 2y)(2y - 2z) =$

$$= (z - x)^2 - (2x - x - z)(x + z - 2z)$$

$$= (z - x)^2 - (x - z)(x - z) = 0 = \text{vế phải}.$$

Cho nên đẳng thức (2) thành lập, các bước trên có thể làm ngược, ta nói bài toán giải xong.

2) Bảo đảm các mối quan hệ suy diễn nhất quán. Tức là muốn nói : toàn bộ quá trình của phép phân tích từng bước một móc xích với nhau suy ngược đến đủ các điều kiện đã cho, không được giữa chừng đổi hướng, nếu không sẽ xảy ra sai sót về logic.

Ví dụ 2. Cho biết $|a| < 1$, $|b| < 1$.

Chứng minh $\left|\dfrac{a + b}{1 + ab}\right| < 1$

Có học sinh dùng phép phân tích chứng minh như sau :

Giả thiết $\left|\dfrac{a + b}{1 + ab}\right| < 1$ thành lập : Vì hai vế đều không âm, nên bình phương hai vế có :

$\dfrac{(a + b)^2}{(1 + ab)^2} < 1$ tức chỉ cần chứng minh $(a + b)^2 < (1 + ab)^2$ hay nói cách khác, chỉ cần chứng minh $a^2 + 2ab + b^2 < 1 + 2ab + a^2b^2$.

$\Rightarrow$ chỉ cần chứng minh $a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2$ (1)

$\Rightarrow$ chỉ cần chứng minh $a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2 < 1 + b^2$ (2)

$\Rightarrow$ chỉ cần chứng minh $a^2 < 1$

nên $|a| < 1$

Mà đã biết $a < 1$, nên bất đẳng thức $\left|\dfrac{a + b}{1 + ab}\right| < 1$ thành lập.

Cách chứng minh như thế là sai ! Sai ở chỗ bất đẳng thức (2), vì $a^2 + b^2 < 1 + b^2$ nhưng không thể từ đó mà suy ra $a^2 + b^2 <$

$1 + a^2b^2$, cũng như vì $x < 7$ nên không được vì thế mà suy ra $x < 3$. Tức là $a^2 + b^2 < 1 + b^2$ không phải là điều kiện đủ để $a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2$ mà chỉ là điều kiện cần của $a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2$.

Cách chứng minh đúng nên là :

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 \Leftarrow |a+b| < |1+ab|$$

$$\Leftarrow a^2 + 2ab + b^2 < 1 + 2ab + a^2b^2 \Leftarrow a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2$$

$$\Leftarrow a^2 + b^2 - 1 - a^2b^2 < 0 \Leftarrow (b^2 - 1)(1 - a^2) < 0$$

$$\Leftarrow a^2 < 1 \text{ và } b^2 < 1 \text{ hoặc } a^2 > 1 \text{ và } b^2 > 1$$

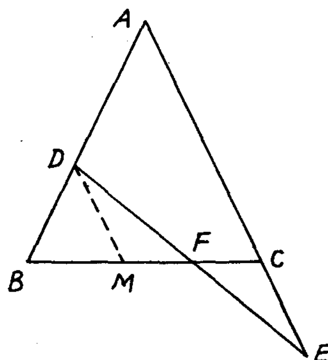
$$\Leftarrow |a| < 1 \text{ và } |b| < 1 \text{ hoặc } |a| > 1 \text{ và } |b| > 1.$$

Mà đã biết $|a| < 1$ và $|b| < 1$, cho nên bất đẳng thức đã cho thành lập.

Đối với bài khó, điều kiện và kết luận cách nhau khá xa, chỉ dùng phép tổng hợp hay phép phân tích để giải cũng khó đạt hiệu quả tốt. Lúc đó tốt nhất là dùng đồng thời cả hai xen kẽ nhau : một mặt xem điều kiện, nhớ lại định lí, mặt khác xem kết luận, nhớ lại định lí. Giống như đào cái cống ngầm, thi công từ hai đầu lại thì dễ thông.

Ví dụ 3. Cho hình 13–4, trong tam giác ABC, biết AB = AC, trên cạnh AB lấy điểm D, kéo dài AC đến E sao cho CE = BD, nối DE cắt BC ở F. Chứng minh DF = EF.

Phân tích : Để chứng minh DF = EF, vì EF là một cạnh của tam giác CEF, nên ta tìm cách tạo ra một tam giác có cạnh là DF. Muốn thế từ D ta kẻ DM // AC, cắt BC ở M, chỉ cần chứng minh



Hình 13–4

$\Delta MDF \cong \Delta CEF$. Dùng cách gì để chứng minh hai tam giác cùng bằng nhau ? Thử dùng phép tổng hợp thăm dò :

Vì DM // AE nên ta có $\widehat{FDM} = \widehat{FEC}$. Hai tam giác MDF và CEF muốn bằng nhau còn thiếu một điều kiện là cạnh tương ứng bằng nhau. Kết hợp với điều kiện đã cho BD = CE, ta dễ dàng nghĩ đến, nếu DM = CE thì sẽ đủ các điều kiện. Vì BD = CE nên chỉ cần chứng minh BD = DM là được.

Ta lại dùng phép phân tích.

Để chứng minh BD = DM, chỉ cần chứng minh $\hat{B} = \widehat{DMB}$; chỉ cần chứng minh $B = \widehat{ACB}$ (vì DM // AE nên $\widehat{DMB} = \widehat{ACB}$) ; chỉ cần chứng minh AB = AC, mà đã biết AB = AC nên dòng suy nghĩ đã tìm được.

Đề này còn có cách chứng minh khác bạn đọc tự giải.

Ví dụ khác : Nếu $a, b \in R^+$ và $a \neq b$. Chứng minh : $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$. Đề này nếu chỉ dùng phép tổng hợp để giải, suy nghĩ làm sao để từ $a^3 + b^3$ suy ra nó lớn hơn $a^2b + ab^2$ là điều không dễ. Do đó kết hợp với phép phân tích :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^2b + ab^2 = ab(a + b) \text{ thì } a^3 + b^3 > a^2b + ab^2 \Leftarrow$$

$$a^2 - ab + b^2 > ab \Leftarrow (a - b)^2 > 0 \ (a \neq b)$$

Do đó đường lối suy nghĩ trở nên rõ ràng.

Vì $a, b \in R^+$ $a \neq b$

nên $a + b > 0$, $(a - b)^2 > 0$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a - b)^2 + ab]$$

$$= (a + b)(a - b)^2 + (a + b)(ab) > (a + b)ab = a^2b + ab^2$$

2. Phép quen thuộc hóa

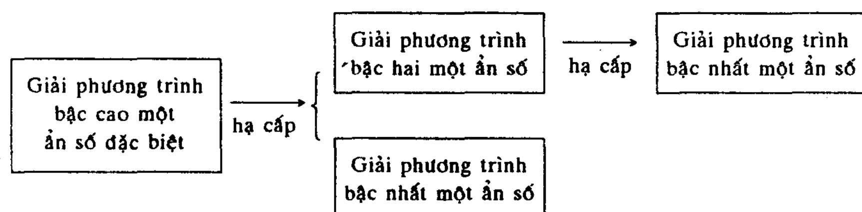
Sau khi học được tính chất của phương trình bậc nhất một ẩn số và bất đẳng thức rồi lại học giải bất đẳng thức chứa một ẩn

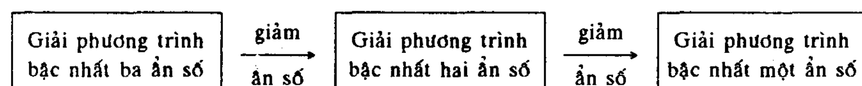
số, rất dễ khiến ta nghĩ đến bất đẳng thức bậc nhất một ẩn số và phương trình bậc nhất một ẩn số về hình thức rất giống nhau, có thể dựa theo các bước giải phương trình bậc nhất một ẩn số để giải. Ở đây một vấn đề là mới, một vấn đề là cũ đã quen thuộc. Sự chuyển hóa giữa cũ và mới từ liên tưởng đến thực hiện là một loại phương pháp tư duy toán học rất quan trọng.

Đưa một vấn đề mới cần giải quyết qui về vấn đề cũ quen thuộc mà mình đã từng giải quyết, cách tư duy đó gọi là quen thuộc hóa (cũng gọi là phép quay về).

Phép quen thuộc hóa là phương pháp tư duy toán học thường gặp. Khi ta giải bài tập, trước hết nên nghĩ đến bài này có giống với bài nào trước đây đã làm không ? Nếu phát hiện thấy nó giống với vấn đề nào đó trước đây thì có thể dựa vào phương pháp và kết quả cũ để tìm ra con đường giải quyết.

Dưới đây xin lấy ví dụ về giải phương trình (hệ phương trình) trong đại số để minh họa. Ta dùng sơ đồ để diễn đạt. Mũi tên "→" là chỉ từ vấn đề mới chuyển về vấn đề cũ.





Lại ví dụ sau khi học hằng đẳng thức $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, khi tìm $(x - y)^2$ và $(x + y + z)^2$ cũng đã dùng phương pháp tư duy quen thuộc hóa.

$(x - y)^2 = [x + (-y)]^2$ → $(a + b)^2$

$(x + y + z)^2 = [x + (y + z)]^2$ → $(a + b)^2$

Trong hình học phẳng khi đi tìm phương pháp để xét hai hình tam giác đồng dạng cũng đã dùng phương pháp tư duy quen thuộc hóa.

Xét hai hình tam giác đồng dạng :	Xét hai tam giác bằng nhau :
- Hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau, góc kẹp giữa chúng bằng nhau.	- Cạnh - góc - cạnh
- Ba cặp cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau.	- Cạnh - cạnh - cạnh

Chỉ cần chú ý đến quá trình tư duy giải bài tập thì sẽ phát hiện : thường từ sự việc này sẽ nhớ đến việc khác, "gặp cảnh sinh tình". Sự hoạt động này của não trong tâm lí học gọi là liên tưởng. Liên tưởng là đôi cánh của tư duy, là cầu nối giải quyết vấn đề. Phương pháp quen thuộc hóa chủ yếu là thông qua liên tưởng so sánh để thực hiện. Đúng như nhà toán học Mĩ - Polia đã chỉ rõ "Sự thực thì so sánh là người dẫn đường vĩ đại"

Phương thức liên tưởng so sánh thường gặp của phép quen thuộc hóa có ba dạng :

1) Liên tưởng định nghĩa, nguyên lí, định lí và qui tắc

Ví dụ 1 : Tìm giá trị nhỏ nhất của $|x - 2| + |x - 10|$?

Có thể loại đề này bạn chưa làm, nhưng điều đó không hề gì. Trước hết ta hãy quan sát và phân tích đặc điểm của nó. Rất rõ ràng, trong phép tính có hai trị số tuyệt đối, trong kí hiệu tuyệt đối là hai số hạng bậc nhất khác nhau chứa x. Từ đó ta nhớ đến muốn giải bài tập này thì phải lần lượt tìm giá trị của $|x - 2|$ và $|x - 10|$ sau đó xem tổng của chúng có phải luôn lớn hơn một hằng số nào đó không ? Do đó nhớ đến định nghĩa của trị tuyệt đối :

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

Vấn đề lập tức được giải quyết.

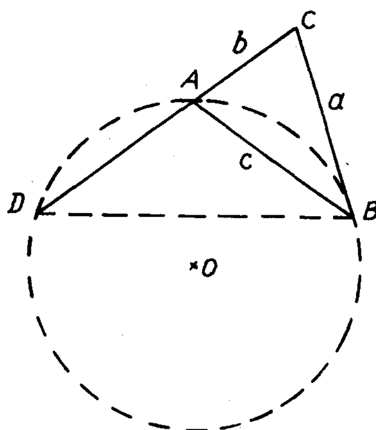
$$|x-2|+|x-10|=\begin{cases} 2-x+10-x=(10-2)+ \\ +2(2-x)>10-2, & (x<2); \\ 10-2, & (x=2); \\ x-2+10-x=10-2, & 2<x<10; \\ 10-2, & x=10; \\ x-2+x-10=(10-2)+ \\ +2(x-10)>10-2, & x>10 \end{cases}$$

vì $|x-2|+|x-10| \geqslant 10-2$ tức là $|x-2|+|x-10| \geqslant 8$ nên $|x-2|+|x-10|$ có giá trị nhỏ nhất là 8.

Nếu liên tưởng ý nghĩa hình học của giá trị tuyệt đối thì ý nghĩa của vấn đề này là tìm tổng các cự li nhỏ nhất của điểm x đến điểm 2 và điểm 10. Vẽ trục số ta sẽ thấy, chỉ khi x ở giữa điểm 2 và 10 (bao gồm cả điểm 2 và 10) thì tổng các khoảng cách nhỏ nhất. Khoảng cách nhỏ nhất này bằng khoảng cách 8 giữa điểm 2 và điểm 10.

Ví dụ trên là đề bài liên tưởng đến định nghĩa. Dưới đây đưa ra một ví dụ khác, mời độc giả suy nghĩ liên tưởng đến cái gì.

Cho biết : Hình vẽ 13-5 biểu thị a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC và $a^2 = b(b+c)$. Chứng minh $A = 2B$.



Hình 13-5

Phân tích : Từ điều kiện $a^2 = b(b+c)$ ta liên tưởng đến định lí đường cát tuyến của đường tròn trong hình học phẳng. Do đó ta vẽ đường tròn bổ trợ, dùng phương pháp hình học phẳng để chứng minh.

Chứng minh : Kéo dài CA đến điểm D sao cho $AD = AB = c$,

lúc đó CD = b + c. Vẽ vòng tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABD (như hình vẽ). Vì $a^2 = b(b + c)$ tức $CB^2 = CA.CD$ nên CB cắt ○ O ở B (định lí đảo của định lí đường cát tuyến).

Vì AB = AD = c nên $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ mà $\widehat{CAB} = 2\widehat{ADB} = 2\widehat{ABC}$ tức trong ΔABC : $\hat{A} = 2\hat{B}$.

Qua giải bài này ta rút ra gợi ý : có những vấn đề nhờ liên tưởng so sánh rút ra được cách giải còn chưa đủ mà phải tạo thêm điều kiện, phải thêm những yếu tố bổ trợ như vẽ trên hình, đặt thêm ẩn số... mới giải được.

Dưới đây nêu hai ví dụ về toán cấp ba.

Ví dụ 2. Tìm $C_{10}^{o}C_{20}^{o} + C_{10}^{1}C_{20}^{1} + ... + C_{10}^{10}C_{20}^{10}$.

Lần đầu gặp vấn đề này dễ gây cho ta không biết bắt đầu từ đâu. Nhưng nếu quan sát kĩ cấu tạo của biểu thức ta phát hiện thấy nó là tổng của 11 số hạng đầu của cấp số $\{a_n\}$ mà công thức chung của số hạng $a_n = C_{10}^{n-1}C_{20}^{n-1}$. Từ đó mà liên tưởng đến định lí nhị thức có hệ số khai triển của C_{10}^{n-1} là $(1 + x)^{10}$ hoặc $(x+1)^{10}$.. Hệ số khai triển của C_{20}^{n-1} là $(1 + x)^{20}$ hoặc $(x + 1)^{20}$.

Ta liên tưởng đến cấu tạo một biểu thức nhị thức mới, sao cho hệ số khai triển của nó đúng bằng tích của $(1 + x)^{10}$ và $(1 + x)^{20}$.

Rõ ràng, nhị thức đó sẽ là $(1 + x)^{10}.(x + 1)^{20} = (1 + x)^{30}$.

Để có được $C_{10}^{o}C_{20}^{o} + C_{10}^{1}C_{20}^{1} + ... + C_{10}^{10}C_{20}^{10}$ ta phải dùng kiến thức tổ hợp, chỉ cần lấy dãy khai triển của $(1 + x)^{10}.(x + 1)^{20}$ có chứa hệ số x^{20} là được. Bên vế phải, trong dãy khai triển của $(1 + x)^{30}$ hệ số của số hạng thứ 20 là C_{30}^{20}, cho nên :

$$C_{10}^{o}C_{20}{}^{o} + C_{10}^{1}C_{20}^{1} + ... + C_{10}^{10}C_{20}^{10} = C_{30}^{20}.$$

Ví dụ 3. Biết hình elip C và elip $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ có tiêu điểm chung và nó đi qua điểm M trên đường thẳng $x - y + 6 = 0$. Hỏi điểm M ở chỗ nào để trục dài của elip C nhỏ nhất ?

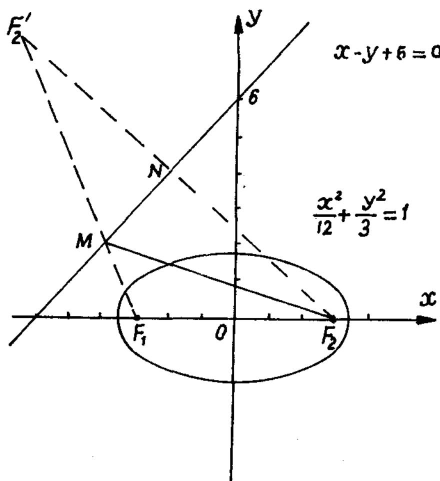
Theo đề ra, elip C và elip $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ có chung tiêu điểm, ta liên tưởng đến phương trình hệ các elip chung tiêu điểm, giả thiết elip C cần tìm có phương trình

$$\frac{x^2}{12 - k} + \frac{y^2}{3 - k} = 1 \ (k < 3)$$

Do đó vấn đề chuyển thành tìm giá trị nhỏ nhất của $12 - k$. Rõ ràng điều này rất khó khăn. Làm thế nào ? Ta lại liên tưởng đến định nghĩa hình elip. Đã biết tiêu điểm của elip là $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ thì có $|MF_1| + MF_2| = 2a$ nên vấn đề lại được chuyển thành tìm điểm M trên đường thẳng $x - y + 6 = 0$ sao cho tổng hai đoạn thẳng MF_1, MF_2 nhỏ nhất. Đây là vấn đề ta đã quen thuộc (hình 13-6).

Ta vẽ điểm F'_2 đối xứng với điểm F_2 qua trục đối xứng $x - y + 6 = 0$, nối F'_2F_1 và cắt đường thẳng $x - y + 6 = 0$ ở điểm M, ta có $|MF_1| + |MF_2| = |F_1F'_2|$ nhỏ nhất.

Ta biết phương trình $F_2F'_2$ là $y = -x + 3$. Tọa độ giao điểm của $F_2F'_2$ với đường thẳng $x - y + 6 = 0$ là $N\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$.



Hình 13-6

Lợi dụng công thức tọa độ điểm giữa có thể biết $F'_2(-6, 9)$.

Từ ba điểm F'_2, M, F_1 ta tìm được M $\left(-3\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$

2) Liên tưởng đến những vấn đề đã từng giải quyết

Ví dụ giải đề sau, nếu $x < -2$ thì

$$\left|1 - |1 + x|\right| = ?$$

Trên sách giáo khoa đại số cấp hai không có vấn đề trị số tuyệt đối của số tuyệt đối, vậy bắt đầu từ đâu ? Ta nhớ đến trước đây đã từng dùng ý nghĩa của số tuyệt đối để đơn giản hóa vấn đề trị số tuyệt đối của số tuyệt đối (hai cấp trị số tuyệt đối). Làm thế nào để chuyển vấn đề hai cấp trị tuyệt đối thành một cấp ? Ta có thể chia thành từng bước : đầu tiên không xét đến dấu trị số tuyệt đối bên ngoài, như vậy ta đã chuyển thành xét $1 - |1 + x|$. Tìm ra giá trị tuyệt đối của nó sẽ tiến sang tìm bước thứ hai.

$$\text{vì } x < -2 \text{ nên } x + 2 < 0 \text{ do đó } x + 1 < -1 < 0$$

Do đó $\left|1 - |1 + x|\right| = |1 - (-1 - x)| = |2 + x| = -2 - x$

Ví dụ khác, tính $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

Rõ ràng không thể đơn giản hóa $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$ và $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Chắc bạn đã từng giải loại bài tập $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$, thử nhớ lại cách giải ra sao ? Ban đầu ta có thể dùng cách bổ trợ là giả thiết ẩn số :

Giả thiết $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} = x \ (x > 0)$

Bình phương cả hai vế được : $x^2 = 8 + 2$ nên $x = \sqrt{10}$

$$\text{Do đó } \sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{10}$$

Ta dùng phương pháp bổ trợ giả thiết ẩn số để giải đề trên.

Giả thiết $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x$

Lập phương cả hai vế được (theo công thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$) :

$$20+14\sqrt{2} + 20-14\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \times$$

$$\times\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right) = x^3.$$

Sau khi ước lược được :

$x^3 - 6x - 40 = 0$

Vậy $(x-4)(x^2+4x+10) = 0$

vì $x^2 + 4x + 10 \neq 0$ nên $x = 4$.

vậy $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$

3) Liên tưởng đến phương pháp và kỉ xảo thường dùng.

Ví dụ : Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-3} + y = 1\\ y\sqrt{x-3} = -2\end{cases}$

(Đề thi vào PTTH năm 1986 của tỉnh An Huy)

Xét đặc điểm của đề làm ta liên tưởng đến phương pháp đặt ẩn phụ : giả thiết $\sqrt{x-3} = z$, hệ phương trình sẽ là $\begin{cases}z + y = 1\\ yz = -2\end{cases}$

Nhớ đến định lí Viet : z.y là hai nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn số $u^2 - u - 2 = 0$, giải ra được :

$\begin{cases}y = -1\\ z = 2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y = 2\\ z = -1\end{cases}$

Vì $\sqrt{x-3} = -1$ không nhận nên $\begin{cases}y = 2\\ z = -1\end{cases}$ bị loại

Vì $\sqrt{x-3} = 2$ nên $x = 7$, qua kiểm nghiệm nó đúng là nghiệm của phương trình.

Do đó nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases}$

Ví dụ khác, chứng minh hằng đẳng thức của tam giác : cho biết .

$$\sin A + \sin 3A + \sin 5A = a$$

$$\cos A + \cos 3A + \cos 5A = b$$

Chứng minh : $tg3A = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).

Phân tích : từ $\frac{a}{b} = \frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A}$. Quan sát ta thấy tử số và mẫu số đều là tổng sin và cosin của bội số lẻ góc A, còn vế trái là tg3A. Theo kinh nghiệm trước đây dễ dàng nhớ đến biến tổng của hai số hạng thành tích. Ngoài ra ta cũng nhớ đến cách biến ba số lẻ liên tiếp thành $3A = \frac{A + 5A}{2}$ nên ta biến tổng sinA + + sin5A và cosA + cos5A thành tích như sau

$$\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A} = \frac{\sin 3A + 2\sin 3A\cos 2A}{\cos 3A + 2\cos 3A\cos 2A}$$

$$= \frac{\sin 3A(1 + 2\cos 2A)}{\cos 3A(1 + 2\cos 2A)} = tg3A$$

Ta lại xem đề thi dưới đây : Có 1 đường tròn, vẽ tùy ý 993 đường kính qua tâm, chúng tạo ra 1986 giao điểm với đường tròn. Ở mỗi giao điểm ghi một số nào đó trong các số từ 1 đến 496 (có thể ghi trùng lặp). Chứng minh : chắc chắn có thể tìm được hai đường kính mà tổng hai điểm đầu mút của chúng bằng nhau.

Giải bài này như thế nào ? Những học sinh đã học qua tổ hợp chắc sẽ liên tưởng đến nguyên tắc rút thăm. Đó là phương pháp thường dùng để giải quyết vấn đề tính tồn tại. Do đó sẽ chuyển sang bước nghiên cứu tạo các thăm ra sao. Thử nghĩ xem ở mỗi giao điểm chỉ có thể viết 1 số trong các số từ 1 – 496, 993 đường

kính, tổng hai đầu của chúng sẽ tạo ra bao nhiêu tổng khác nhau ? Ta lần lượt xét từ nhỏ đến lớn.

Nếu một đầu của đường kính viết số 1, vậy đầu kia có thể viết từ 1, 2,... 496. Như vậy sẽ được 496 tổng khác nhau : 1 + 1 ; 1 + 2 ; 1 + 3 ; ... ; 1 + 496.

Nếu một đầu của đường kính viết số 2, muốn được tổng hai đầu của đường kính đều khác với ở trên thì chỉ có thể là đầu kia đều viết 496, như vậy được tổng 2 + 496.

Tiếp tục cách đó, nếu một đầu đường kính viết 3, muốn được tổng hai đầu đường kính đều khác với tất cả các tổng trước thì chỉ có thể viết đầu kia là 496, được 3 + 496.

Tiếp tục theo cách đó cuối cùng ta được các tổng khác nhau là : 2 + 496 ; 3 + 496 ; ... ; 496 + 496 tất cả gồm 496 tổng. Cho nên tất cả có 496 + 495 = 991 tổng khác nhau. Do đó trong số 993 đường kính số tổng hai đầu của mỗi đường kính khác nhau tối đa chỉ có 991 tổng, nên căn cứ nguyên tắc rút thăm chắc chắn có thể tìm được hai đường kính có tổng hai đầu của chúng bằng nhau.

3. Phép biến đổi vấn đề

Các nhà tâm lí học khi nghiên cứu hành vi tư duy của động vật đã làm một thí nghiệm lí thú. Trong phòng nhốt hắc tinh tinh treo một nải chuối ở trần nhà, chỉ để cho nó thấy mà không với đến được. Trong phòng chỉ đặt mấy thùng gỗ, ngoài ra không có cái gì khác. Hắc tinh tinh chỉ biết nhảy lên với lấy chuối nhưng làm thế nào cũng không với tới.

Sau nhiều lần thất bại, bỗng nhiên nó chú ý đến mấy thùng gỗ, thế rồi nó đứng im nhìn mãi, bỗng nhiên nó khiêng mấy thùng gỗ chồng lại, nhảy lên thùng và lấy được chuối. Thành công của hắc tinh tinh trên phương diện nào đó mà nói, khi gặp một vấn đề mới, nếu kinh nghiệm cũ không giúp được gì thì cách tốt nhất là thay đổi phương thức giải quyết vấn đề.

Giải toán là một quá trình tư duy phức tạp. Khi ta dùng phương pháp quen thuộc hóa để giải mà không đạt được kết quả thì phải tìm cách thay đổi tư duy của mình, vòng qua vật chướng ngại để tìm cách khác. Nếu không thì giống như một nhà toán học đã ví dụ về loài côn trùng "muốn bay ra ngoài qua cửa kính, nó cứ lặp đi lặp lại một động tác vô vọng là húc vào cửa mà không biết tìm đến chỗ cánh cửa đang mở, nơi mà vốn nó đã vào". Nhà toán học hiện đại Polia của Mĩ trong cuốn sách "Giải bài tập như thế nào" đã nói một câu rất sâu sắc rằng : "Thành công trong giải bài tập là nhờ vào xác định phương hướng chính xác, nhờ vào biết công đồn đúng phía. Mà muốn tìm được phương hướng đúng, phía công đồn đúng thì lại phải thử nghiệm đủ các mặt, các phía, tức phải biến đổi vấn đề".

Biến đổi vấn đề tức là dưới tiền đề các quan hệ cơ bản của bài toán, biến đổi một phần nào đó, từ đó dẫn đến một vấn đề bổ trợ cho đầu bài. Biến đổi vấn đề khiến ta đưa vào một nội dung mới, mở ra khả năng dùng kiến thức cũ, nó giúp ta có khả năng qua giải quyết vấn đề bổ trợ phát hiện ra phương pháp giải bài toán.

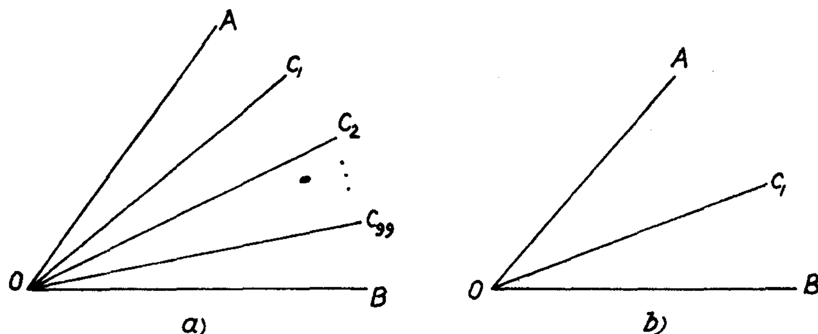
Nếu đã dùng vấn đề bổ trợ thứ nhất mà giải không ra, ta lại bắt đầu từ phía khác, nếu vẫn không được thì giả thiết cái thứ ba... Vấn đề bổ trợ này giống như những thùng gỗ, đứng lên nó ta sẽ từng bước với đến nải chuối dưới trần nhà và cuối cùng lấy được.

Vậy làm thế nào để biến đổi vấn đề ?

1) Từ phức tạp lui về đơn giản. Nhà toán học nổi tiếng của Trung quốc – Hoa La Canh đã chỉ rõ : "Thạo về "lùi", lùi đủ mức, lùi đến mức ban đầu mà vẫn giữ được tính chủ yếu của vấn đề là một bí quyết để học tốt toán". Đối với một vấn đề phức tạp nào đó, ta thường tìm cách đơn giải hóa ; hoặc nói cách khác, trên cơ sở vẫn giữ được tính chất ban đầu vốn có của vấn đề, lùi đến mức, từ đó tìm ra được cách giải quyêt vấn đề ; hoặc phân tích một vấn đề đơn giản để tìm thấy con đường giải quyết vấn đề.

Dưới đây ta xét một ví dụ hình học.

Ví dụ : Cho hình vẽ 13–7a, trong góc nhọn AOB có 99 đoạn thẳng. Hỏi chúng đã phân $\widehat{AOB}$ ra thành bao nhiêu góc nhọn, (bao gồm cả góc $\widehat{AOB}$) ?

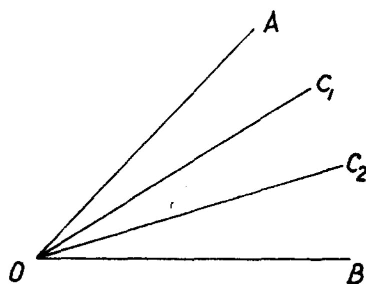


Hình 13–7

Giải bài này nếu đếm từng góc thì rất phức tạp và dễ sai. Còn cách khác như về tổ hợp thì ta chưa học. Do đó dựa vào kinh nghiệm và kiến thức cũ thì không đủ để giải quyết vấn đề.

99 đoạn thẳng là rất phức tạp, lùi về 98 đoạn cũng còn rất phức tạp. Đơn giản nhất là lùi về chỉ còn 1 đoạn. Ta tìm biện pháp bổ trợ : giả thiết trong $\widehat{AOB}$ chỉ có một đoạn OC_1, quan sát trực tiếp đã thấy có ba góc : $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC_1}$, $\widehat{C_1OB}$ tức $S_1 = 1 + 2 = 3$ (hình 13–7b).

Ta lại tiếp tục quan sát khi trong góc $\widehat{AOB}$ có hai đoạn thẳng. Nhìn vào hình vẽ ta thấy có sáu góc : $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC_1}$, $\widehat{BOC_2}$, $\widehat{AOC_2}$, $\widehat{C_2OC_1}$ và $\widehat{C_1OB}$, tức là $S_2 = 1 + 2 + 3 = 6$ (hình 13–7c).



Hình 13–7c

Thử so sánh số đoạn thẳng và số góc để tìm quy luật. Ta thấy số

góc S bằng tổng các số tự nhiên bắt đầu từ 1, số hạng cuối cùng của tổng bằng số đoạn thẳng trong góc cộng thêm 1.

Nên $S_{99} = 1 + 2 + ... + 100 = \frac{100 \times (100 + 1)}{2} = 5050$ góc.

Ví dụ khác. Giả thiết x, y, z là ba số thực khác nhau và $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Chứng minh $x^2y^2z^2 = 1$.

Đọc qua đầu bài, có thể bạn sẽ nghĩ x = 1, y = 1, z = 1, do đó $z^2y^2z^2 = 1$. Có đúng thế không ? Đề cho là x, y, z là ba số thực khác nhau, do đó chúng không thể bằng 1 được. Nên nghĩ thế là sai.

Hoặc bạn sẽ dùng phương pháp giải hệ phương trình để tìm x, y, z. Thử làm xem có dễ không ? Có lẽ ta chưa vừa lòng bằng cách đó.

Bây giờ ta thử tìm cách đơn giải hóa dự kiện và kết luận của bài toán đi xem có mở ra con đường nào không.

Tạm bỏ z đi, biến thành chỉ còn hai ẩn. Tức là :

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{x}, \text{ chứng minh } x^2y^2 = 1.$$

Từ điều kiện ta được : $x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

Hay $xy(x - y) = y - x$

Vì $x \neq y$ nên $xy = -1$ hay $x^2y^2 = 1$.

Thành công rồi ! Từ đó gợi ý cho ta : bước then chốt đầu tiên trong chứng minh là biến đổi hình thức của đẳng thức. Một vế là hiệu hai ẩn, vế phải là hiệu hai nghịch đảo. Bắt chước cách giải đó :

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \\ y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \\ z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz(x - y) = y - z \\ zx(y - z) = z - x \\ xy(z - x) = x - y \end{cases}$$

Nhân mỗi vế của ba đẳng thức với nhau ta có :

$x^2y^2z^2(x - y)(y - z)(z - x) = (y - z)(z - x)(x - y)$

Vì x, y, z khác nhau nên $x - y \neq 0$, $y - z \neq 0$, $z - x \neq 0$.

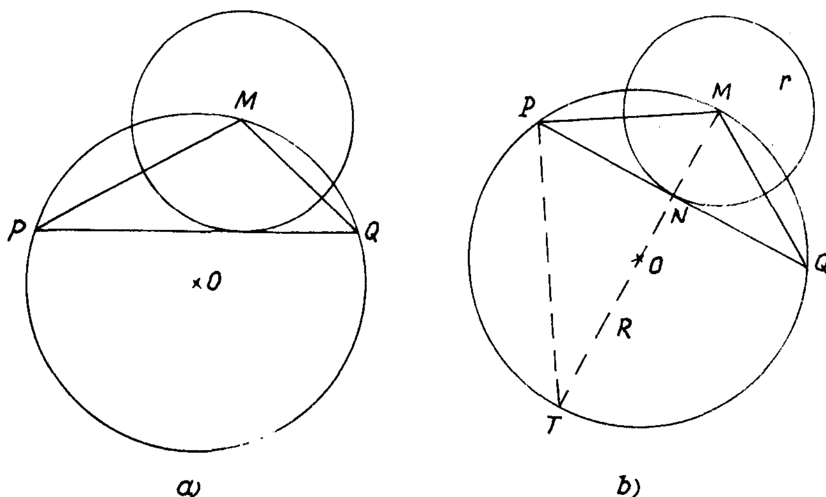
Do đó $x^2y^2z^2 = 1$.

Cách chứng minh này thật là ngắn gọn, đẹp biết bao !

2) Từ chung chung lùi về đặc biệt. Có một số đề toán, sự liên hệ giữa dự kiện và điều cần chứng minh không rõ ràng, mục tiêu cần tìm không rõ ràng, lời giải chung chung, rất khó trực tiếp liên tưởng một cách chính xác. Do đó, trước hết ta cần phải nghiên cứu một hoặc mấy trường hợp điển hình, từ những đáp số đặc biệt đó để tìm kiếm qui luật chung, tìm kiếm các gợi ý, để tìm ra phương pháp giải. Cách làm như thế thường mở ra con đường cần thiết.

Dưới đây phân tích cách suy nghĩ để giải đề hình học :

Ví dụ : Cho biết như hình vẽ 13-8a, M là một điểm trên đường tròn bán kính R tâm O. Lấy M làm tâm, vẽ vòng tròn bán kính



Hình 13-8

r. Tiếp tuyến của vòng tròn tâm M cắt đường tròn tâm O ở P và Q. Chứng minh : dù P và Q ở vị trí nào thì tích MP.MQ là 1 số không đổi.

Giải Vì không cho biết rõ số không đổi như thế nào, do đó trước hết cần tìm ra nó. Cho dù tiếp tuyến PQ ở đâu thì tích MP.MQ = const, nên khi nó ở vị trí đặc biệt thì kết quả vẫn không thay đổi. Do đó ta đưa nó về vị trí đặc biệt. Ví dụ đặc biệt có lợi nhất là PQ ⊥ MO, (hình 13-b). Dĩ nhiên tam giác vuông MPT ~ Rt ΔMNQ nên $\frac{MP}{MT} = \frac{MN}{MQ} \Rightarrow MP.MQ = MT.MN = 2Rr = const.$

Do đó làm ta liên tưởng đến : chỉ cần tìm được hai tam giác vuông Rt Δ MPT và Rt Δ MNQ có chứa MP. MQ là có thể chứng minh được.

Ta xét ví dụ khác về đại số.

Ví dụ : Chứng minh số có dạng $N = \{\underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ số}} \underbrace{55 \ldots 5}_{(n-1) \text{ số}}6$ là số chính phương.

n là số tự nhiên tùy ý, nên đây là đề toán về số tự nhiên. Ta biết rằng số chính phương có thể viết : $N = a^2$ trong đó a là số tự nhiên. Với bài này chính là tìm a. Vậy từ n lùi về đến số mấy thì thích hợp ? Ta lần lượt cho :

$n = 1$ lúc đó $N = 16 = 4^2$

$n = 2$ " " $N = 1156 = 34^2$

$n = 3$ " " $N = 111556 = 334^2$.

Quan sát ba trường hợp đặc biệt ở trên ta thấy : khi n = 1 ; 2 ; 3 thì $N = 4^2$; 34^2 ; 334^2.

Do đó có thể đoán $N = \underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ số}} \quad \underbrace{55 \ldots}_{(n-1) \text{ số}}6 = \underbrace{33 \ldots 3}_{(n-1) \text{ số}}4^2$

$= (\underbrace{33 \ldots 3}_{n \text{ số}} + 1)^2$

Như vậy có thể giả thiết $\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{số}}\underbrace{55\ldots56}_{(n-1)\text{số}} = (\underbrace{xx\ldots x}_{n\ \text{số}} + 1)^2$

Thông qua giải phương trình để xác định giá trị x. Do đó bài toán được giải quyết.

3) Từ trừu tượng lùi về cụ thể. Thầy giáo ra cho học sinh một đề bài về trị số nhỏ nhất của giá trị tuyệt đối : căn cứ định nghĩa của trị tuyệt đối, tìm giá trị nhỏ nhất của $|x - a| + |x - b|$ ($a < b$).

Đề bài cho toàn bằng chữ, đối với học sinh mới học quả thật là quá trừu tượng, ta rất khó tìm ra mối liên quan giữa dự kiện và kết luận. Lúc đó ta dễ nghĩ đến có thể cụ thể hóa vấn đề trừu tượng này không ? Tìm cách làm rõ một số trường hợp cụ thể, sau đó từ những trường hợp cá biệt, cụ thể này mà tìm ra phương pháp giải để suy ra cho cái chung.

Ta ví dụ : $a = 1$, $b = 2$, xét giá trị nhỏ nhất của $|x - 1| + |x - 2|$, sau đó bàn về giá trị nhỏ nhất của chúng.

Dùng phương pháp điểm không (gốc trục số) ta biết được 1 và 2 là điểm không của $x - 1$, $x - 2$. Do đó có :

$$|x-1| + |x-2| = \begin{cases} 1-x+2-x = 1+2(1-x) > 1 & (x<1); \\ -1+x+2-x = 1 & (1 \leqslant x < 2); \\ x-1+x-2 = 2x-3 \geqslant 4-3 = 1 & (x \geqslant 2) \end{cases}$$

Qua đó thấy rõ $|x - 1| + |x - 2|$ có trị số nhỏ nhất là 1.

Từ ví dụ cụ thể trên, ta đã tìm thấy phương pháp giải trị số nhỏ nhất của $|x - a| + |x - b|$.

Đầu tiên tìm điểm không : $x_1 = a$, $x_2 = b$.

Do đó có

$$|x-a| + |x-b| = \begin{cases} a-x+b-x = (b-a)+2(a-x) > b-a & (x<a); \\ x-a+b-x = b-a & (a \leqslant x < b); \\ x-a+x-b = 2x-a-b \geqslant 2b-a-b = b-a & (x \geqslant b) \end{cases}$$

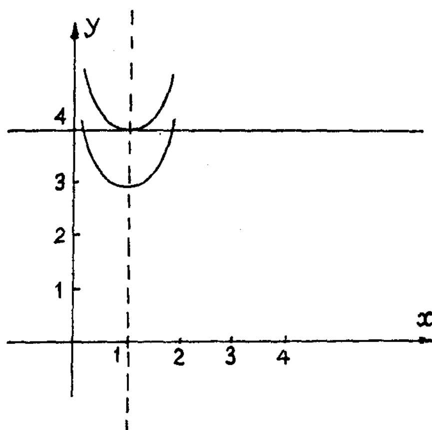
Từ đó biết được $|x - a| + |x - b|$ $(a < b)$ có giá trị nhỏ nhất là $b - a$.

Ta giả một ví dụ khác : Tìm hệ số của x.

Với giải trị nào của a thì bất đẳng thức $0 \leq x^2 + ax + 5 \leq 4$ chỉ có một nghiệm.

Nếu dùng đơn thuần phương pháp đại số để giải đề này thì rất phiền phức. Xét dấu bất đẳng thức đã cho là biểu thức bậc hai, ta liền nghĩ đến đồ thị của hàm số bậc hai. Như vậy ta sẽ mượn đồ thị đưa vấn đề đại số trừu tượng chuyển về đồ thị hàm số bậc hai và quan hệ của nó với : vị trí đường thẳng. Nhờ tính trực quan của hình vẽ giúp ta cách giải bài toán.

Giả thiết $y = x^2 + ax + 5$ là hình parabol hướng bề lõm lên trên, còn $y = 4$ là đường thẳng nằm ngang song song với trục x và cắt trục y ở +4. $y = 0$ là trục x. Do đó vấn đề trở thành : với giá trị nào của a thì đường parabol nằm giữa trục x và đường $y = 4$ chỉ có 1 điểm (hình 13-9) ?



Hình 13-9

Từ hình vẽ ta thấy, khi đỉnh của parabol ở phía trên đường thẳng $y = 4$ bất đẳng thức không có lời giải ; khi đỉnh của nó nằm thấp hơn đường thẳng $y = 4$, bất phương trình có vô số lời giải. Chỉ khi đỉnh của nó nằm trên đường thẳng $y = 4$ thì parabol và đường thẳng chỉ có một điểm chung, cho nên lúc đó bất đẳng thức vừa có đúng một nghiệm, tức có hệ phương trình.

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = x^2 + ax + 5 \end{cases}$$

có hai nghiệm thực bằng nhau, nên tìm được $a = \pm 2$.

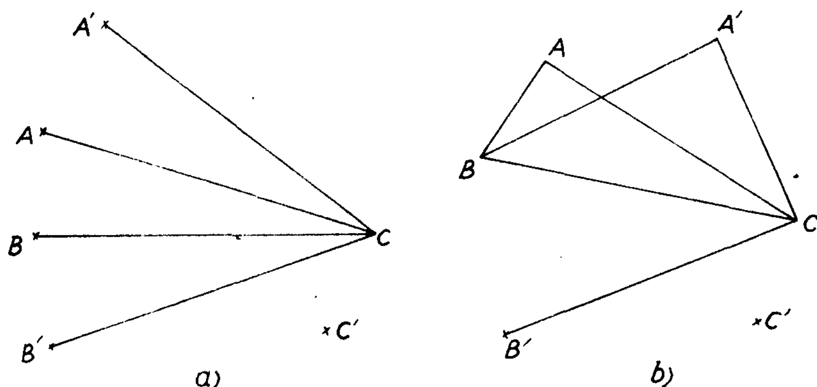
Từ trừu tượng lùi về cụ thể còn có tình huống khác nữa không ? Xin mời xem đề thi dưới đây.

Hai anh em A và A' đi họp. Cùng dự họp còn có hai cặp anh em khác. Họ bắt tay nhau, cùng anh em với nhau thì không bắt tay, mỗi người không bắt tay người khác hai lần. Sau khi bắt tay xong, A phát hiện, trừ A ra, số lần bắt tay của mỗi người khác nhau. Hỏi A và A' mỗi người đã bắt tay mấy lần ?

Đây là đề bài logic dùng lời văn diễn tả rất trừu tượng. Từ câu chữ mà xét rất khó làm rõ các mối quan hệ trong bài. Không ít học sinh khi gặp đề này, càng nghĩ cảm thấy đầu óc càng rối, không tìm ra đầu mối. Vậy làm thế nào ? Ta biến vấn đề trừu tượng này thành hình vẽ các đường nối.

Dùng điểm để biểu thị người dự họp. Hai người bắt tay nhau, dùng đường nối hai điểm lại. Như vậy để trả lời câu hỏi A và A' bắt tay bao nhiêu lần trở thành việc tìm hai điểm A, A' đã nối với 4 điểm khác bằng bao nhiêu đoạn thẳng.

Giải : Giả thiết hai anh em là A, A', ngoài ra hai cặp anh em khác là B, B' và C, C'. Lấy một điểm trong số đó làm xuất phát, mỗi lần hai người bắt tay nhau thì nối thành 1 đoạn thẳng. Dễ dàng biết được A' không thể nối thành 4 đường. Giả thiết xuất phát từ C, vì hai anh em không bắt tay nhau cho nên C nhiều nhất nối được với A, A', B, B', tất cả 4 đoạn. Vì trừ A ra, số lần bắt tay của mỗi người khác nhau, không kể A còn có 5 điểm, chỉ có 5 kiểu nối khác nhau. Do đó số đoạn thẳng chỉ có thể là : 4, 3, 2, 1, 0. C đã nối thành 4 đoạn, C' chỉ có thể không nối đoạn nào, B, B', A, A' mỗi điểm đã nối một đường (hình 13-10a). Tiếp theo chỉ cần xác định cho B, B', A' trong đó điểm nào nối ba đường, hai đường và một đường. Ta có thể chọn tùy ý một trong ba điểm đó nối 3 đường, giả thiết đó là điểm B (dễ dàng biết rằng A' không thể nối 3 đường). Vậy điểm B chỉ có thể nối với : A, A' (như hình 13-10b). Có thể thấy được : B nối 3 đường, A' nối 2 đường, B' nối 1 đường, A nối 2 đường. Như vậy trừ A ra, số đoạn thẳng của 5 điểm còn lại đều khác nhau. Cho nên A bắt tay 2 lần, A' cũng hai lần.



Hình 13-10

Đề toán này thực tế là vấn đề "bàn về hình chia nhánh" trong toán.

Cụ thể hóa vấn đề trừu tượng tuy có nhiều cái lợi, nhưng khi dùng cần chú ý số trường hợp cụ thể hóa phải đủ để thảo luận rút ra quy luật, nếu không dễ bị sai lầm. Ví dụ như đề toán dưới đây.

a là số tự nhiên $\neq 0$. Hỏi $N = a^4 - 3a^2 + 9$ là số nguyên tố hay hợp số ?

Đề bài có hệ số a nên khá trừu tượng, vì thế rất khó đoán N là thuộc loại số gì. Do đó phải giả thiết a thành các số cụ thể thay vào để xét

Khi $a = 1$, $N = 1 - 3 + 9 = 7$ số nguyên tố.

" $a = 2$, $N = 2^4 - 3.2^2 + 9 = 13$ số nguyên tố.

Do đó có người đã khẳng định $N = a^4 - 3a^2 + 9$ là số nguyên tố. Có đúng thế không ? Ta tiếp tục xét.

Khi $a = 3$, $N = 3^4 - 3 \times 3^2 + 9 = 63$ hợp số.

" $a = 4$, $N = 4^4 - 3 \times 4^2 + 9 = 117$ hợp số.

Điều đó nói lên sự khẳng định trên kia là sai. Sự phán đoán chính xác có thể là :

Khi $a \leqslant 2$, N là số nguyên tố.

Khi $a > 2$, N là hợp số.

Phán đoán này đã đúng chưa, còn cần phải theo logic phân tích thêm

Khi $a \geqslant 3$ giả thiết $a = 3m$, m là số tự nhiên. Do đó :

$$N = (3m)^4 - 3(3m)^2 + 9 = 9(9m^4 - 3m^2 + 1)$$

$$= 9[(3m^2 - 1)^2 + 3m^2]$$

Tất nhiên $(3m^2 - 1) + 3m^2$ là số tự nhiên lớn hơn 1, tức có thể chia N thành tích hai số tự nhiên lớn hơn 1.

Khi $a = 3m \pm 1$ ta có $N = (9m^2 \mp 3m + 1)(9m^2 \pm 15m + 7)$. Cho nên N là hợp số.

Qua đó có thể thấy, sự phán đoán lần sau là chính xác.

Vậy vì sao lần đầu đã phán đoán sai ? Đó là vì khi phán đoán đã áp dụng phép qui nạp từ cụ thể đến trừu tượng để suy diễn, điều đó không hoàn toàn là quy nạp. Trên logic mà nói, thật ra không phải vì thế mà không bảo đảm kết luận đúng đắn. Do đó khi áp dụng phải cẩn thận, phải thử số lần nhiều hơn. Nghe nói nhà toán học Ơ-le cũng đã từng dùng đa thức $n^2 + n + 41$ để biểu thị số nguyên tố. Nhưng sự thể nghiệm đó đã không thành công. Vì cho dù khi $n = 1, 2, ... 39$ thì $n^2 + n + 41$ đều là số nguyên tố, nhưng khi $n = 40$ giá trị của nó không còn là số nguyên tố nữa : $40^2 + 40 + 41 = 41^2$

Từ cách suy nghĩ giải ba đề trên bạn có thể quy nạp và khái quát ra phương pháp chung để từ trừu tượng đưa về cụ thể được không ?

4) Từ toàn thể đưa về bộ phận. Bạn có thể giải đề toán sau không ?

Tìm chữ số cuối cùng của số $1985^{1984} + 1987^{1988}$?

Vừa xem qua đã thấy con số lớn quá, dùng máy tính cũng khó tính ra kết quả. Người có nhiều kinh nghiệm chắc sẽ nghĩ ngay đến không cần tính toán hết tất cả các trị số, chỉ cần tìm ra chữ số cuối cùng là được. Vì đề cho là tổng của hai lũy thừa, không tìm ra ngay số cuối của tổng được, do đó đầu tiên phải tìm ra số cuối cùng của từng số lũy thừa, sau đó mới cộng lại để tìm số cuối. So sánh số cuối cơ số của hai số này ta thấy một số là 5, một số là 7. Rõ ràng chữ số hàng cuối của 1985^{1984} với bất kì số mũ nguyên dương nào cũng đều là 5. Bây giờ ta quan sát số 1987^{1988} có chữ số cuối biến đổi theo quy luật nào.

7^1	có chữ số cuối là	7,
7^2	....	9
7^3	....	3
7^4	....	1
7^5	....	7
7^6	....	9
⋮		⋮

Từ đó có thể thấy rõ chữ số cuối của nó xuất hiện theo chu kì lặp đi lặp lại của 4 số ; 7, 9, 3, 1. 1988 chia vừa hết cho 4, nên chữ số cuối của 1987^{1988} là số 1. Vậy

$1985^{1984} + 1987^{1988}$ có số cuối cùng là 6.

Cách giải đề này đã áp dụng phương pháp từ toàn bộ lùi về bộ phận.

Khi ta gặp một vấn đề mênh mông, khó giải thì nên nghĩ đến : có thể giải quyết vấn đề theo từng bộ phận được không ? Đương nhiên là nên chọn khâu dễ nhất, yếu nhất để giải quyết trước. Giống như đánh đồn, tìm chỗ dễ đánh nhất chọn làm chỗ đột phá, từ đó mở rộng ra dần. Từ toàn thể lùi về bộ phận, tìm chỗ đột phá cũng là phương pháp tư duy thường dùng.

Phương pháp từ toàn thể lùi về bộ phận thực chất là chia vấn đề ra thành từng phần, giải từng phần một, sau đó tổ hợp lại để giải quyết toàn bộ.

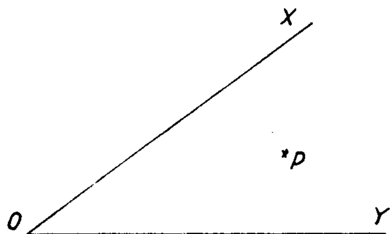
5) Từ chỗ cứng lùi về chỗ mềm. Khi gặp một vấn đề khó, có lúc có thể nghĩ : nếu tạm thời bỏ qua hoặc nới rộng một điều kiện nào đó thì vấn đề sẽ giải được dễ dàng, tức là tạm thời giải quyết một vấn đề yếu hơn. Sau đó dùng kết quả này làm bàn đạp để giải quyết vấn đề.

Dưới đây nêu một ví dụ hình học để nói rõ cách áp dụng phương pháp này.

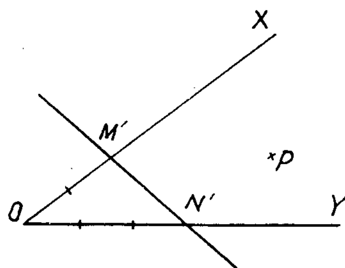
Ví dụ 1. P là một điểm trong góc $\widehat{XOY}$. Tìm đoạn thẳng vẽ qua P cắt OX ở M, cắt OY ở N, và sao cho $\frac{OM}{ON} = \frac{2}{3}$ (hình 13 - 12)

Rõ ràng đoạn thẳng cần tìm phải thỏa mãn hai điều kiện : thứ nhất, đi qua điểm P ; thứ hai $\frac{OM}{ON} = \frac{2}{3}$. Muốn một bước thực hiện được ngay là rất khó.

Ta nới rộng điều kiện ra, trước hết tạm bỏ qua điều kiện đoạn thẳng đi qua P. Ta vẽ đường thẳng trong góc XOY, cắt OX, OY ở M' và N' sao cho OM' : ON' = $\frac{2}{3}$. Điều này rất dễ. Lấy một đoạn thẳng u bất kì làm đơn vị, trên OX lấy OM' = 2u, trên OY lấy ON' = 3u. Nối M'N' là được (xem hình 13 - 12).



Hình 13-11



Hình 13-12

Vấn đề "hơi yếu" này với vấn đề ban đầu có mối quan hệ gì ? Nó có trở thành bậc thang để giúp ta tiến lên giải quyết vấn đề ban đầu không ? Nếu bạn đã làm quen với định lí chia các đường thẳng thành đoạn tỉ lệ thì sẽ thấy ngay bây giờ chỉ còn lại là cách vẽ mà thôi, tức qua điểm P ta vẽ đoạn thẳng MN // M'N' là xong.

Qua ví dụ trên ta thấy rõ, vấn đề "hơi yếu" ở đây thực chất là bước bắt đầu để giải quyết vấn đề ban đầu. Nó là vấn đề phụ của vấn đề ban đầu. Nó có tác dụng biến vấn đề từ khó đến dễ, đích thực là bậc thang có ích cho ta.

Tất nhiên, cũng có lúc không thay đổi dữ kiện mà chỉ "nới rộng" kết luận. Đó cũng là cách biến thành giải quyết một vấn đề "mềm" hơn.

Ngoài ra, trong toán học, khi chứng minh một định lí nào đó, để cho quá trình chứng minh được ngắn gọn, rõ ràng, ta rút một phần của định lí ra làm thành một mệnh đề và trước hết chứng minh mệnh đề (tức "định lí mềm" hơn) này, theo thói quen hay gọi đó là định lí dự bị. Chắc mọi người còn nhớ khi học về hình đồng dạng đã có một định lí đưa ra dưới hình thức bài tập như sau :

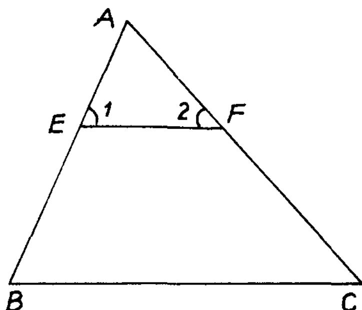
Ví dụ 2. Đoạn thẳng cắt hai cạnh bên và song song với cạnh thứ ba của tam giác sẽ làm thành tam giác mới có 3 cạnh tỉ lệ với tam giác cũ.

Đây rõ ràng là một định lí, nhưng vì sao trong sách giáo khoa (của cấp II Trung quốc) không gọi là định lí mà làm thành bài tập ? Đó là vì trong sách giáo khoa nó chỉ được dùng để chứng minh một định lí : đoạn thẳng song song với đáy và cắt hai cạnh bên của tam giác sẽ tạo thành tam giác mới đồng dạng với tam giác cũ. Để dễ hiểu, ta chép lại dưới đây đoạn chứng minh đó.

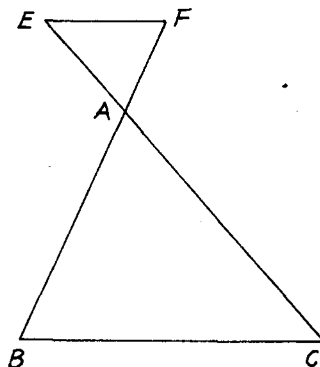
Trong tam giác ABC của hình 13–13, EF // BC.

$$EF // BC \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} \text{ (kết luận của ví dụ 2)} \\ < 1 = < B \\ < 2 = < C \\ < A = < A \end{cases} \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$$

Tương tự, có thể chứng minh hình 13-14 khi EF // BC thì ΔAEF ~ Δ ABC



Hình 13-13



Hình 13-14

Qua đó ta thấy, phương pháp tư duy từ vấn đề cứng lùi về vấn đề mềm có hai cách làm khác nhau. Một cách là nới rộng điều kiện hoặc kết luận, cách khác là lấy một phần trong quá trình chứng minh làm vấn đề bổ trợ. Cả hai cách làm này thực tế đều là chia vấn đề ban đầu thành mấy vấn đề độc lập liên quan với nhau, làm cho vấn đề trở thành dễ giải quyết hơn.

6) Biến đổi kết luận. Có nhiều đề toán, nếu cứ quanh quẩn mãi theo các điều kiện và kết luận của nó thì rất khó giải hoặc rất phiền phức. Khi đó bạn có thể nhớ đến những kiến thức đã học để thay đổi kết luận đi một tí thành dạng dễ giải hơn. Đó cũng là cách tư duy thường dùng trong giải bài tập.

Thay đổi kết luận bài toán như thế nào ?

Có một cách là phân kết luận ra thành vài phần đơn giản, giải từng phần một, cuối cùng tổng hợp lại.

Ví dụ 1. Giả thiết $x > y > z > 0$. Chứng minh

$$x^{2x}y^{2y}z^{2z} > x^{y+z}y^{z+x}z^{x+y} \qquad (1)$$

Chứng minh trực tiếp bất đẳng thức (1) rất khó. Ta có thể chia kết luận ra thành :

Điều kiện để bất đẳng thức (1) thành lập là

$$x^x.x^xy^y.y^y.z^z.z^z > x^y.x^z.y^x.y^z.z^x.z^y \quad (2)$$

Điều kiện để (2) thành lập là

$$(x^xy^y)(y^yz^z)(z^zx^x) > (x^yy^x)(y^zz^y)(z^xx^z) \quad (3)$$

Điều kiện để (3) thành lập là

$$x^xy^y > x^yy^x \ ; \ y^yz^z > y^zz^y \ ; \ z^zx^x > z^xx^z \quad (4)$$

Như vậy kết luận (1) được phân giải thành ba bất đẳng thức của (4). Nếu lần lượt chứng minh được ba bất đẳng thức của (4) thì tức là đã chứng minh được (1).

Quan sát ba bất đẳng thức của (4) ta thấy có đặc điểm các chữ đều đối xứng luân phiên nhau. Cho nên chỉ cần ta chứng minh được một trong ba bất đẳng thức là được.

Vì $x > y > 0$ nên $\frac{x}{y} > 1$, $x - y > 0$.

Cho nên $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} > 1$ do đó $x^{x-y} > y^{x-y}$ tức $x^xy^y > x^yy^x$.

Tương tự ta có : $y^yz^z > y^zz^y$; $z^zx^x > z^xx^z$.

Nhân các vế trái với trái, phải với phải của ba đẳng thức ta được

$$x^{2x}y^{2y}z^{2z} > x^{y+z}y^{z+x}z^{y+x}$$

Còn một cách nữa là biến kết luận thành dạng khác kết luận ban đầu nhưng thực chất giống dạng ban đầu, từ đó mà có cách giải ra kết quả.

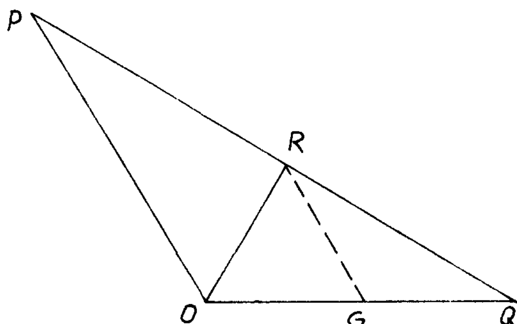
Ví dụ 2. Cho tam giác OPQ, trong đó góc POQ = 120° (hình 13-15). Đường phân giác của góc POQ cắt QP ở R. Chứng minh :

$$\frac{1}{OR} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ} \quad (1)$$

Bài này có rất nhiều cách giải. Nếu giải bằng cách biến đổi kết luận thì ta dễ nhìn ra con đường để đi tới.

Ta có thể biến đổi (1) thành :

$$\frac{OR}{OP} = 1 - \frac{OR}{OQ} = \frac{OQ - OR}{OQ} \qquad (2)$$



Hình 13-15

Cho nên, nếu trên OQ ta lấy OG = OR thì (2) sẽ trở thành :

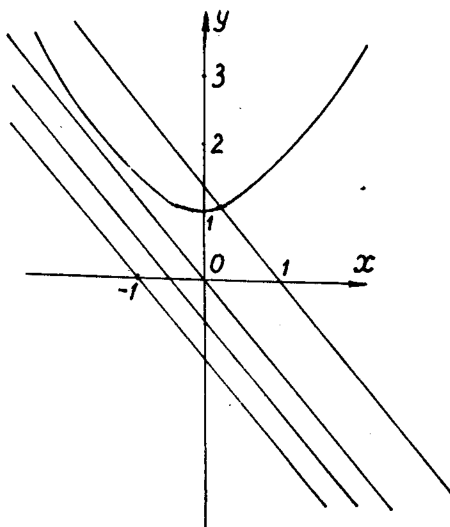
$$\frac{OR}{OP} = \frac{GQ}{OQ} \qquad (3)$$

Tam giác ORG là tam giác cân, góc đỉnh $\hat{O} = 60^o$ nên là tam giác đều. Vì vậy muốn chứng minh (3) thì chỉ cần chứng minh $\frac{GR}{OP} = \frac{GQ}{OQ}$ (4). Như vậy vấn đề ban đầu trở thành vấn đề $\frac{GR}{OP} = \frac{GQ}{OP}$ với điều kiện phụ là OG = OR. Dưới đây ta sẽ chứng minh đẳng thức (4). Nhìn vào hình vẽ ta thấy chỉ cần chứng minh GR // OP (bạn đọc tự chứng minh được chứ ?) rồi dùng định lí talet là được. Sau đó từ (4) đi ngược trở lại vấn đề ban đầu.

Ví dụ 3. Với giá trị nào của m, đường parabol $y = x^2 + 1$ luôn nằm bên trên đường thẳng $y = -2x - m$ (hình 13-16) (1).

Từ điều kiện đầu bài ta biết, đường thẳng $y = -2x - m$ là một họ đường thẳng có hệ số góc bằng -2, còn đường parabol $y = x^2 + 1$ có vị trí cố định, tọa độ đỉnh là (0, 1), bề lõm hướng lên phía trên. Tìm M sao cho thỏa mãn điều kiện đầu bài ? Vì trước đây ta chưa hề giải loại bài này nên khó nghĩ được ngay cách giải.

Ta thử động não biến đổi kết luận xem. Điều đó đòi hỏi phải trở về những khái niệm cơ bản nhất tức là định nghĩa. Trong tọa độ phẳng, điểm $A(x_A, y_A)$ ở phía trên điểm B (x_B, y_B) nghĩa là gì ? Rất đơn giản, đó là $y_A > y_B$. Xuất phát từ điểm cơ bản đó ta suy ra đường parabol $y = x^2 + 1$ ở phía trên đường thẳng $y = -2x - m$ thực chất là trên cùng hoành độ, tung độ của các điểm đường parabol $y = x^2 + 1$ lớn hơn tung độ các điểm của đường thẳng $y = -2x - m$.



Hình 13–16

Tức là $y = x^2 + 1 > y = -2x - m$

$$x^2 + 1 > -2x - m \qquad (2)$$

$$x^2 + 2x + m + 1 > 0 \qquad (3)$$

Giải bất đẳng thức này làm ta nhớ đến quan hệ giữa x với đồ thị hàm số bậc hai.

Bất đẳng thức (3) thực chất nói lên đường parabol $y = x^2 + 2x + m + 1$ ở phía trên trục x, muốn thế chỉ cần biệt số $\Delta < 0$ tức là giải bất đẳng thức $4 - 4(m + 1) < 0$. Đây là vấn đề ta đã thành thạo.

Qua quá trình phân tích trên chứng tỏ chỉ cần biến đổi kết luận (1) thành (3) thì bài toán sẽ được giải dễ dàng. Ở đây (3) và (1) thực chất là như nhau, vấn đề chỉ là chuyển hóa từ hình vẽ sang vấn đề số.

13 - CHÚ TRỌNG KĨ XẢO, NẮM VỮNG NHỮNG PHƯƠNG PHÁP PHỔ BIẾN

1. Phương pháp đưa về bình phương (hay là phương pháp dùng hằng đẳng thức đáng nhớ)

Vào khoảng 3000 năm trước công nguyên, người cổ đại Babilon (nay là lưu vực hai sông I-ran, I-răc) đã nêu lên một vấn đề đại số như sau : tìm một số mà tổng số đó với nghịch đảo của nó đúng bằng nó. Dùng ngôn ngữ toán học biểu diễn là tìm x, sao cho $x + x^{-1} = b$, tức tìm nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - bx + 1 = 0$. Họ đã đặt ra $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, sau đó tìm $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$, rồi giải được đáp số $\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$ và $\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$. Tức là từ xa xưa người ta đã tìm được phương pháp đưa về bình phương để giải phương trình bậc hai.

Trong quá trình biến đổi để đi đến công thức tìm nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, bước then chốt nhất là biến đổi tam thức $ax^2 + bx + c$ về bình phương của một tổng, gọi tắt là phương pháp đưa về bình phương.

Từ $ax^2 + bx + c = 0$ chuyển vế được

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (a \neq 0)$$

tức $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

....

Phương pháp đưa về bình phương đã đặt cơ sở cho việc giải phương trình bậc hai nói chung. Đó là phương pháp phổ biến để giải phương trình bậc hai. Chỉ riêng một điểm đó cũng đủ thấy phương pháp đưa về bình phương rất quan trọng. Đương nhiên sự ứng dụng của nó còn rộng hơn nhiều, ví dụ tìm giá trị của biểu thức đại số, tích của các số hạng, giải phương trình, tìm giá trị cực của hàm số bậc hai, chứng minh bất đẳng thức, v.v... đều dùng đến.

Phương pháp đưa về bình phương tức là phân tích tam thức bậc hai thành biểu thức bình phương hoặc một phần của nó thành biểu thức bình phương.

Dưới đây đưa ra mấy ví dụ để nói rõ ứng dụng chủ yếu của phương pháp này.

1) Đơn giản hóa và tìm giá trị. Cho biểu thức sau :

$\sqrt{9m^2 - 6m + 1}$ $\left(m < \frac{1}{3}\right)$; $\sqrt{\sin^2 20^o - 2\sin 20^o + 1}$;

$\dfrac{1}{\lg 2 \lg 25 + (\lg 2)^2 + (\lg 5)^2 + 1}$ Mấy đề bài này đều có thể trực tiếp đưa về bình phương để tìm giá trị. Cách làm như sau :

$$\sqrt{9m^2 - 6m + 1} = \sqrt{(3m - 1)^2} = 1 - 3m \quad \left(m < \frac{1}{3}\right)$$

$$\sqrt{\sin^2 20^o - 2\sin 20^o + 1} = \sqrt{(\sin 20^o - 1)^2} = 1 - \sin 20^o$$

$$\frac{1}{\lg 2 \lg 25 + (\lg 2)^2 + (\lg 5)^2 + 1} = \frac{1}{(\lg 2)^2 + 2\lg 2 \lg 5 + (\lg 5)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{(\lg 2 + \lg 5)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Dưới đây là những đề khó hơn. Bạn đọc có thể tự giải trước

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \; ; \; \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} \; (x \geq 1).$$

Đối với loại đề này, cần biến đổi một số hạng nào đó để có lợi cho việc đưa về bình phương tổng (hoặc hiệu).

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1 .$$

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} \; (x \geq 1)$$

$$= \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 1} + 1} + \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x - 1} + 1} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x - 1} + 1)^2} =$$

$$= \left|\sqrt{x-1} - 1\right| + \sqrt{x-1} + 1 = \begin{cases} 2\sqrt{x - 1} & \text{khi } x \geq 2 \\ 2 & \text{khi } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Dưới đây là đề toán phải vận dụng linh hoạt hơn phương pháp trên.

Biết : $a - b = \sqrt{2} + 1$, $b - c = \sqrt{2} - 1$

Tìm giá trị $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$?

Phân tích : Ta đã biết giá trị của $a - b$ và $b - c$, tức là gợi ý ta nếu biến đổi biểu thức cần tìm về dạng $(a - b)^2$, $(b - c)^2$ thì vấn đề sẽ rất đơn giản. Trực tiếp dùng biểu thức trên đưa về dạng bình phương là rất khó, do đó ta tìm cách đưa về đẳng thức sau :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

Ở đây xuất hiện số hạng $(c - a)^2$, có thể tìm được không ? Có. Ta biến đổi như sau :

$$c - a = -(a - c) = -[(a - b) + (b - c)]$$
$$= -(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1) = -2\sqrt{2}.$$

Cuối cùng thay vào ta tìm được :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - ca = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 + (-2\sqrt{2})^2] = 7 .$$

2) Biến đổi thành tích. Gặp một đa thức bậc hai, muốn biến đổi thành tích các đơn thức ta thường dùng phép đưa về bình phương.

Ví dụ 1. Biến đổi $ax^2 + y^2 - z^2 + 6xy$ thành tích.

Ta biến đổi như sau :

$$9x^2 + y^2 - z^2 + 6xy = (9x^2 + 6xy + y^2) - z^2$$

$$= (3x + y)^2 - z^2 = (3x + y + z)(3x + y - z).$$

Ví dụ 2. Phân tích biểu thức$1 - a^2b^4 + 2ab^2c^3 - c^6$ thành tích. Ta biến đổi như sau :

$$1 - a^2b^4 + 2ab^2c^3 - c^6 = 1 - (a^2b^4 - 2ab^2c^3 + c^6)$$

$$= 1 - (ab^2 - c^3)^2 = (1 - ab^2 + c^3)(1 + ab^2 - c^3)$$

3) Giải phương trình. Như trên đã nói, phương pháp đưa về bình phương là phương pháp phổ biến để giải phương trình bậc hai một ẩn số, là cơ sở lí luận để lập công thức tìm nghiệm. Tuy nói chung, phương pháp này dùng để giải phương trình bậc hai chưa đơn giản bằng phương pháp khác, nhưng đối với một số phương trình, dùng nó lại rất đơn giản và nhanh.

Ví dụ : Giải phương trình $x^2 - 6x - 9991 = 0$. Nếu dùng công thức tìm nghiệm sẽ được :

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(-9991) \times 1}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 39964}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{40.000}}{2} = \frac{6 \pm 200}{2} = 3 \pm 100 .$$

Trong quá trình tính toán trên, số -9991 trong căn là 4 số, phải làm phép nhân phức tạp, các phép tính nhiều. Nếu dùng phương pháp đưa về bình phương sẽ đơn giản hơn.

$$x^2 - 6x + 9 = 9991 + 9$$
$$(x - 3)^2 = 10000$$
$$x - 3 = \pm 100.$$

Tất nhiên, nếu dùng công thức tìm nghiệm, nhưng tính khéo hơn thì cũng nhanh.

Tức là $\sqrt{36 - 4 \times (9991) \times (-1)} = 2\sqrt{9 + 9991} = 2 \times 100$.

Độc giả có thể suy nghĩ xem dạng phương trình bậc hai như thế nào thì dùng phương pháp đưa về bình phương đơn giản.

4) Giải bất đẳng thức. Có một số bất đẳng thức bậc hai dùng phương pháp đưa về bình phương giải rất đơn giản.

Ví dụ giải bất đẳng thức $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

Biến đổi 2 vế ta được : $(2x - 3)^2 \leq 0$

Cho nên nghiệm của bất đẳng thức chỉ có thể là $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Ví dụ khác. Giải bất đẳng thức $2x^2 - 4x + 3 > 0$

Trước hết đơn giản thành $x^2 - 2x + \frac{3}{2} > 0$.

$$(x - 1)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

Dù x lấy với giá trị nào, bất đẳng thức đều thành lập. Do đó tập nghiệm của bất đẳng thức là tất cả các số thực.

Ví dụ : Với giá trị nào của m, $-x^2 - 2x + m - 6$ luôn âm ?

Ta có : Nếu biến đổi hệ số của x^2 thành dương ta có :

$$x^2 + 2x - m + 6 > 0$$

Hay $$(x + 1)^2 + 5 - m > 0.$$

Muốn cho $-x^2 - 2x + m - 6$ luôn âm thì chỉ cần $5 - m > 0$ tức $m < 5$.

Qua ví dụ trên ta thấy, bất đẳng thức bậc hai sau khi đưa về bình phương, vấn đề được giải quyết trở thành rõ ràng, đơn giản.

5) Chứng minh bất đẳng thức. Trong chương trình toán cấp hai tuy chưa giảng đến chứng minh bất đẳng thức bậc hai nhưng thực tế thì có rất nhiều chỗ đã dùng đến và nhờ đó rút ra được nhiều kết luận quan trọng. Một trong những kết luận thường dùng là : bất đẳng thức $a \geqslant 0$, dấu bằng chỉ thành lập khi $a = 0$. Nếu dùng ngôn ngữ để diễn đạt là : bình phương của bất kì số thực nào đều không nhỏ hơn không.

Từ đó còn có thể rút ra các kết luận quan trọng sau :

$-a^2 \leqslant 0$ khi và chỉ khi $a = 0$ dấu bằng mới thành lập.

$a^2 + m \geqslant m$ khi và chỉ khi $a = 0$ ....

$-a^2 + m \leqslant m$ ....

$a^2 + b^2 = 0$ .... $a = 0, b = 0$ ....

Các bất đẳng thức trên đều có đặc điểm chung là : các số hạng bình phương. Đó là căn cứ để chứng minh các bất đẳng thức khác. Dưới đây nêu 3 ví dụ :

Ví dụ 1. Chứng minh nếu $a > 0$, $b^2 - 4ac \leqslant 0$ thì đối với bất kì số thực nào $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

Muốn chứng minh bất đẳng thức $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ luôn thành lập, đầu tiên ta có thể đưa $ax^2 + bx + c$ về dạng bình phương.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Vì với bất cứ giá trị nào của x, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ và vì $b^2 - 4ac \leqslant 0$

cho nên, chú ý đến $\begin{cases} 4c - b^2 \geqslant 0 \\ a > 0 \end{cases}$

Do đó, với bất kì giá trị nào của x, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

Ví dụ 2. Chứng minh, với bất kì số thực nào của a, b, c, d đều có $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqslant (ac + bd)^2$

Trực tiếp chứng minh kết luận này là khó, ta biến đổi kết luận đi, dùng phương pháp so sánh để chứng minh $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 \geqslant 0$ thành lập.

Muốn chứng minh vế trái $\geqslant 0$ khiến ta nghĩ tới đưa nó về dạng bình phương.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 =$$

$$= a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2abcd - b^2d^2.$$

$$= b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 = (bc - ad)^2.$$

Rất tuyệt ! Qua biến đổi ta được bình phương của một hiệu rất gọn. Thực ra thì bản thân vấn đề đã hàm chứa điều này, nếu không thì kết luận không thể thành lập được.

Dưới đây nêu một ví dụ có tính chất tổng hợp hơn.

Ví dụ 3. Giả thiết a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC. Chứng minh $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) > a^3 + b^3 + c^3 + 2abc$.

Thông thường, dùng phương pháp so sánh để chứng minh.

Lấy vế trái trừ đi vế phải được :

$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc$

$= a(b^2 - 2bc + c^2 - a^2) + b(c^2 + 2ca + a^2 - b^2) + c(a^2 - 2ab + b^2 - c^2)$

$= a(b - c + a)(b - c - a) + b(c + a + b)(c + a - b) + c(a - b + c)(a - b - c).$

$= (a - b + c)[-a(b - c + a) + b(a + b + c) + c(a - b - c)]$ (dùng phép đưa về bình phương)

$= (a - b + c)(-a^2 + 2ac - c^2 + b^2) = (a - b + c)[b^2 - (a - c)^2]$ (đưa về bình phương)

$= (a - b + c)(b + a - c)(b - a + c).$

Căn cứ tính chất tổng hai cạnh bất kì của tam giác bao giờ cũng lớn hơn cạnh thứ ba, ta có :

$$a - b + c > 0, b + a - c > 0, b - a + c > 0.$$

Trên đây đã hai lần đưa về bình phương (dùng hằng đẳng thức đáng nhớ) để giải bài toán.

6) Bàn về phương trình bậc hai một ẩn số. Thảo luận về phương trình bậc hai đề cập đến rất nhiều vấn đề, thường gặp có : bàn về nghiệm, tìm trị dạng đại số của nghiệm, tìm hệ số của phương trình, v.v... Dưới đây nêu ví dụ.

Ví dụ 1. Chứng minh với bất kì số thực nào của m, phương trình $x^2 + (m + 3)x + m - m^2 = 0$ luôn có hai nghiệm thực khác nhau.

Muốn chứng minh phương trình bậc hai luôn có hai nghiệm thực khác nhau thì chỉ cần chứng minh biệt thức Δ luôn lớn hơn không.

Do đó, vấn đề này thực chất là dùng phương pháp đưa về bình phương để chứng minh bất đẳng thức.

$$\Delta = (m + 3)^2 - 4(m - m^2) = 5m^2 + 2m + 9$$

$$= 5\left(m^2 + \frac{2}{5}m + \frac{1}{25}\right) - \frac{1}{5} + 9 \text{ (dùng hằng đẳng thức đáng nhớ)}$$

$$= 5\left(m + \frac{1}{5}\right)^2 + 8\frac{4}{5}.$$

Vì $\left(m + \frac{1}{5}\right)^2 \geq 0$ nên $\Delta > 0$, vấn đề đã chứng minh.

Ví dụ 2. Giả thiết hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + p^2 - 1$ là α và β. Thử dùng p biểu thị $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^4 + \beta^4$.

Từ định lí Viet ta có : $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = p^2 - 1$. Bình phương lên là có thể tìm được. Bạn đọc tự làm.

Ví dụ 3. Giả thiết phương trình $x^2 + (m + 1)x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm đều là số nguyên. Tìm giá trị nguyên của m ?

Muốn cho phương trình có nghiệm nguyên, biệt thức Δ phải là số chính phương, tức yêu cầu phải đưa Δ về dạng bình phương.

$$\Delta = (m + 1)^2 - 4(2m - 1) = m^2 - 6m + 5.$$

$$= (m - 3)^2 - 4$$

Giả thiết $(m - 3)^2 - 4 = n^2$ (n là số nguyên không âm)

vậy $$(m - 3)^2 - n^2 = 4$$

$$(m + n - 3)(m - n - 3) = 4$$

Vì vế trái là tích của hai số nguyên, do đó ta phân tích vế phải

$$4 = 1 \times 4 = (-1) \times (-4) = 2 \times 2 = (-2) \times (-2)$$

Được hệ bốn phương trình :

$$\begin{cases} m + n - 3 = 1 \\ m - n - 3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} m + n - 3 = -1 \\ m - n - 3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + n - 3 = 2 \\ m - n - 3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m + n - 3 = -2 \\ m - n - 3 = -2 \end{cases}$$

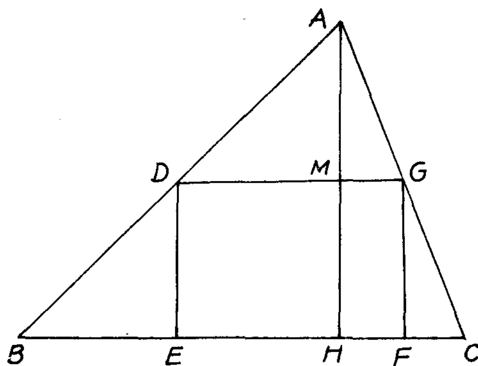
Giải ra được m = 1 hoặc m = 5.

7) Nghiên cứu những tính chất chung của phương trình bậc hai.

Phương pháp dùng hằng đẳng thức đáng nhớ có một tác dụng rất quan trọng trong nghiên cứu phương trình bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Ví dụ nghiên cứu tọa độ đỉnh parabol, phương trình trục đối xứng, đồng biến, nghịch biến, giá trị cực, v.v... đều thông qua phương pháp này để đưa phương trình bậc hai về dạng điểm đỉnh $y = a(x + m)^2 + n$ sau đó thảo luận. Điều đáng chú ý là :

dùng phương pháp này tìm giá trị của phương trình so với công thức giá trị cực $y_{cực} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ thì có những độc đáo riêng : giản tiện, dễ nhớ. Do đó, khi cần tìm giá trị cực, người ta ít rập khuôn dùng công thức mà lại thích dùng phương pháp hằng đẳng thức để giải.

Ví dụ : Cho tam giác ABC như hình 14-1, đáy BC = a, chiều cao AH = h. Muốn cắt 1 hình chữ nhật DEFG, cạnh EF trên BC. Hỏi DE phải bằng bao nhiêu để được diện tích hình chữ nhật lớn nhất ?



Hình 14-1

Ta giả thiết chiều dài hình chữ nhật EF = x, rộng DE = y, diện tích là S.

$$\text{Vì DG // BC nên } \frac{x}{a} = \frac{h - y}{h}$$

$$S = xy = \frac{a}{h}(h - y)y$$

$$= -\frac{a}{h}\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{ah}{4}$$

Cho nên khi $y = \frac{h}{2}$ tức $DE = \frac{h}{2}$ ta có $S = \frac{ah}{4}$ lớn nhất. Khi đó diện tích hình chữ nhật bằng một nửa diện tích tam giác.

8) Vẽ đồ thị hàm số bậc hai. Cho phương trình bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, vẽ đồ thị của nó. Trước hết ta biến đổi nó thành dạng điểm đỉnh :

$$y = a(x + m)^2 + n, \text{ trong đó } m = \frac{-b}{2a}, \; n = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Sau đó căn cứ vào tính đối xứng của parabol đối với trục đối xứng $x = -m$ để lấy các giá trị x ở hai bên $-m$

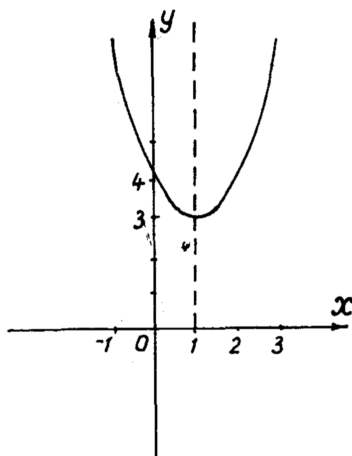
Ví dụ : Vẽ đồ thị của $y = 2x^2 - 4x + 5$.

Ta biến đổi $y = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x - 1)^2 + 3$

Lập bảng

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	11	5	3	5	11	...

Ta được đồ thị như hình 14-2.



Hình 14-2

2. Phương pháp xác định hệ số

Nói đến phương pháp xác định hệ số, khá nhiều học sinh cảm thấy mới lạ, thực ra việc tìm mối quan hệ giữa nghiệm và các hệ số của phương trình bậc hai (định lí Viét) chính là dùng phương pháp xác định hệ số để giải quyết. Phương pháp xác định hệ số là phương pháp toán học căn cứ vào tính chất các số hạng đồng dạng của hai vế luôn bằng nhau để đưa vấn đề về cách giải phương trình mà trong đó hệ số chờ xác định sẽ là ẩn số. Đây cũng là một phương pháp toán học quan trọng thường dùng.

Dùng phương pháp xác định hệ số có thể tìm số thương và số dư, phân tích đa thức thành tích, tìm hàm số, giải phương trình, biến đổi phân thức, chứng minh điều kiện đẳng thức, v.v...

1) Tìm thương và số dư. Dùng phương pháp xác định hệ số tìm thương Q(x) và số dư R(x) của $x^3 + x + 1$ chia cho $2x^2 + 3x + 1$.

Giải : Vì số bị chia là biểu thức bậc ba, số chia là bậc hai nên có thể giả thiết thương $Q = ax + b$, số dư là $R = cx + d$.

Vì $x^3 + x^2 + 1 = (ax + b)(2x^2 + 3x + 1) + (cx + d)$

tức $x^3 + x^2 + 1 = 2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (a + 3b + c)x + (b + d)$.

So sánh hệ số của hai vế ta được :

$$\begin{cases} 1 = 2a \\ 1 = 3a + 2b \\ 0 = a + 3b + c \\ 1 = b + d \end{cases} \quad \text{do đó} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{4} \\ c = \dfrac{1}{4} \\ d = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy số thương $Q(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, số dư $R(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

Khái quát quá trình trên ta thấy, dùng phương pháp xác định hệ số để tìm thương và số dư của phép chia đa thức có mấy đặc điểm sau :

(1) Bậc của số bị chia và số chia sẽ quyết định bậc của thương và số dư và dùng hình thức xác định hệ số để giả thiết dạng biểu diễn của chúng. Bậc của thương là hiệu giữa bậc số bị chia và số chia, bậc của số dư thấp hơn bậc số chia một bậc.

(2) Từ đẳng thức cơ bản của phép chia $f(x) = Q(x).g(x) + r(x)$ (trong đó f(x) là số bị chia, g(x) là số chia, Q(x) là thương và r(x) là số dư) so sánh hệ số những số hạng đồng dạng của hai vế sẽ lập được hệ phương trình trong đó hệ số chờ xác định là ẩn số. Đây là mấu chốt của phương pháp xác định hệ số.

3) Giải hệ phương trình, tìm được các hệ số, từ đó tìm được thương và số dư.

2) Phân tích đa thức thành tích. Phân tích đa thức $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x + 4y - 2$ thành tích.

Đây là đa thức bậc hai có hai ẩn số, phân tích trực tiếp rất khó khăn. Quan sát ba số hạng đầu của đa thức ta có thể phân tích thành : $2x^2 - 3xy - 2y^2 = (2x + y)(x - 2y)$.

Do đó ta phán đoán : nếu đa thức $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 4y - 2$ có thể phân tích thành đa thức bậc nhất, thì tất nhiên sẽ có dạng : $(2x + y + n)(x - 2y + m)$. Chỉ cần ta tìm ra m và n thì có thể phân tích đa thức thành tích được. Nếu m, n không tồn tại, thì có thể khẳng định đa thức này không thể phân tích thành tích.

Do đó ta giả thiết $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x + 4y - 2$

$= (2x + y + n)(x - 2y + m)$ tức là

$$2x^2-3xy-2y^2+3x+4y-2 = 2x^2-3xy-2y^2+(2m+n)x+(m-2n)y+mn$$

So sánh hệ số các số hạng đồng dạng ở hai vế ta được :

$$\begin{cases} 2m + n = 3 & (1) \\ m - 2n = 4 & (2) \\ mn = -2 & (4) \end{cases}$$

Từ (1), (2) có thể tìm được $m = 2$, $n = -1$, thay vào (3) phù hợp. Vậy $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x + 4y - 2 = (2x + y - 1)(x - 2y + 2)$

Tất nhiên ta cũng có thể dùng cách quan sát để giải, ở đây không giải cụ thể nữa.

Ta xét ví dụ khác : Biến $x^4 + 4x^2 + 3x + k$ có 1 thừa số $x^2 + x + 1$. Tìm giá trị k và thừa số khác ?

Giải : Đa thức $x^4 + 4x^2 + 3x + k$ gồm 4 số hạng, đã có một thừa số $x^2 + x + 1$. Do đó thừa số cần tìm là đa thức bậc hai.

Giả thiết $x^4 + 4x^2 + 3x + k = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c)$ tức $x^4 + 4x^2 + 3x + k = ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (b + c)x + c$

So sánh các số hạng đồng dạng của hai vế ta có các hệ số bằng nhau

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ a + b + c = 4 \\ b + c = 3 \\ c = k \end{cases}$$

Giải ra được $a = 1$, $b = -1$, $c = 4$, $k = 4$. Do đó một thừa số khác bằng $x^2 - x + 4$, trong $x^2 + x + 1$ và $x^2 - x + 4$ không thể ước lược cho nhau được. Cho nên

$$x^4 + 4x^2 + 3x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 4)$$

3) Tìm dạng hàm số. Với đề dưới đây, có bạn cho là bình thường. Sau lúc giải xong, thử nghĩ xem bạn đã áp dụng phương pháp gì ?

Biết đường thẳng $y = kx + b$ đi qua điểm $(-2, 7)$ và khi $x = 5$, có $y = -7$. Tìm dạng giải tích của hàm số ?

Cách làm thông thường là theo điều kiện đề ra, lập phương trình.

$$\begin{cases} 7 = -2k + b \\ -7 = 5k + b \end{cases}$$ Giải được $k = -2$, $b = 3$.

Tức $y = -2x + 3$.

Ở đây đã dùng phương pháp xác định hệ số, chẳng qua là đề bài đã cho dạng hàm số chứa hệ số chờ xác định.

Tương tự, phương pháp xác định hệ số cũng thường được dùng để giải phương trình bậc hai.

Cho biết đồ thị hàm số bậc hai đi qua ba điểm $A(0, 1)$, $B(1, 3)$ và $C(-1, 1)$. Tìm dạng giải tích của hàm số ?

Dạng thông dụng của hàm số bậc hai là $y = ax^2 + bx + c$. Căn cứ đề bài ta được : $\begin{cases} 1 = c \\ 3 = a + b + c \\ 1 = a - b + c \end{cases}$

Giải hệ phương trình sẽ được : a = 1, b = 1, c = 1. Vậy dạng giải tích của hàm số bậc hai là $y = x^2 + x + 1$.

Ta biết ý nghĩa hình học của hằng số c trong hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là tung độ giao điểm của parabol với trục tung, do đó từ đề bài ta thấy đồ thị đi qua điểm A(1, 0) nên có thể biết c = 1. Như vậy bớt được một hệ số không cần xác định và đổi thành tìm hàm số $y = ax^2 + bx + 1$.

4) Tìm nghiệm của phương trình. Trong đại số có hai loại phương trình đều dùng phương pháp xác định hệ số để giải. Một loại là đã biết được một nghiệm của phương trình dạng nguyên có hệ số bằng chữ, hoặc là mối quan hệ giữa các nghiệm, yêu cầu tìm giá trị hệ số và tìm những nghiệm còn lại ; loại thứ hai là tìm nghiệm của phương trình dạng nguyên trong tập số phức. Xin xem hai ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1. Biết một nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 2a = 0$ là 1. 1) Tìm giá trị a ; 2) Tìm nghiệm khác.

Phân tích : Theo định nghĩa của phương trình, x = 1 phù hợp với phương trình. Thay 1 vào ta được 1 – a + 2a = 0, giải ra được a = –1. Nghiệm còn lại có thể dùng định lí Viét để tìm, được x = –2.

Ví dụ 2. Số phức z thỏa mãn đẳng thức $z + |\bar{z}| = 2 + i$. Tìm z (Đề thi vào cao học năm 1989).

Phân tích : Giả thiết z = a + bi (a, b ∈ R). Thay vào được :

$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + i$$

Căn cứ điều kiện đủ bằng nhau của số phức, được

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

giải ra được $a = \frac{3}{4}$, b = 1 và $z = \frac{3}{4} + i$.

5. Biến đổi một phân thức thành mấy phân thức. Trong quá trình tính toán hoặc biến đổi phân thức có lúc phải biến đổi một phân thức thành mấy phân thức.

Ví dụ : $\frac{5x - 4}{(x - 1)(2x - 1)} = \frac{1}{(x - 1)} + \frac{3}{(2x - 1)}$, trong đó hai phân thức đơn giản hơn $\frac{1}{(x - 1)}, \frac{3}{(2x - 1)}$ được gọi là các phân thức bộ phận của phân thức ban đầu $\frac{5x - 4}{(x - 1)(2x - 1)}$. Làm thế nào để biến một phân thức thành tổng đại số của mấy phân thức ? Ta có thể dùng phương pháp xác định hệ số.

Biết $\frac{42 - 19x}{(x - 4)(x^2 + 1)} = \frac{A}{(x - 4)} - \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$. Tìm A, B, C ?

Giải : Giả thiết $42 - 19x = A(x^2 + 1) - (x - 4)(Bx + C)$. Cho $x = 4$, được $A = -2$. thay $A = -2$ vào, chỉnh lí ta được : $42 - 19x = (B - 2)x^2 + (C - 4B)x - (4C + 2)$

$$\begin{cases} B - 2 = 0 \\ C - 4B = -19 \\ -(4C + 2) = 42 \end{cases}$$ giải ra được : $B = 2$, $C = -11$.

Do đó $A = -2$, $B = 2$, $C = -11$.

6) Chứng minh điều kiện bằng nhau.

Biết đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$ chia hết cho $x^2 + p$. Chứng minh $ad = bc$.

Có nhiều phương pháp để chứng minh bài này, có thể trực tiếp chia không có số dư, có thể dùng phương pháp xác định hệ số. Dưới đây dùng phương pháp xác định hệ số để chứng minh.

Vì số bị chia là đa thức bậc ba, chia hết cho nhị thức bậc hai nên thương phải là biểu thức bậc một. Giả thiết thương là $mx + n$ (m, n là hệ số chờ xác định). Do đó có đẳng thức :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (mx + n)(x^2 + p).$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = mx^3 + nx^2 + pmx + pn.$$

So sánh các số hạng đồng dạng của hai vế được :

$$\begin{cases} a = m & (1) \\ b = n & (2) \end{cases}, \qquad \begin{cases} c = pm & (3) \\ d = pn & (4) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình được :

$$(1) \times (4) \rightarrow ad = pmn$$

nên $ad = bc$

$$(2) \times (3) \rightarrow bc = pmn$$

7) Tìm tổng dãy số liệt. Ta biết rằng với bất kì đa thức f(x) có bậc k nào, luôn tồn tại công thức tìm tổng $S_{f(x)}$ có duy nhất (k + 1) bậc và thỏa mãn điều kiện :

$$S_{f(0)} = 0,\ S_{f(k+1)} = f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(k).$$

Vì vậy ta có thể dùng phương pháp xác định hệ số để tìm tổng dãy số liệt.

Ví dụ : Tìm tổng $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + (n - 1)^2$.

Phân tích : Vì $f(x) = x^2$ nên giả thiết

$$\begin{aligned} S_{f(n)} &= f(0) + f(1) + ... + f(n-1). \\ &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 \\ &= an^3 + bn^2 + cn + d \end{aligned}$$

Lần lượt cho n = 1, 2, 3, 4 được

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 5 \\ 64a + 16b + 4c + d = 14 \end{cases} \text{ giải ra được } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \\ d = 0 \end{cases}$$

Do đó $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 =$

$$= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

3. Phương pháp ẩn số phụ

Đưa vào một hoặc mấy ẩn số phụ thay cho những bộ phận nào đó của đa thức và tìm kết quả, tiếp tục tìm ra giá trị ẩn số, phương pháp toán học đó gọi là phương pháp ẩn số phụ. Đó cũng là một trong những phương pháp quan trọng. Phương pháp ẩn số phụ có thể biến đổi từ bậc cao xuống bậc thấp, từ dạng phân thức về dạng nguyên, từ vô tỉ về hữu tỉ, từ dạng siêu việt (hàm số mũ, hàm số log, hàm số lượng giác) về dạng đại số. Nó có tác dụng biến khó thành dễ, biến phức tạp thành đơn giản. Phương pháp này được dùng rộng rãi trong rút gọn các đa thức, biến đổi thành tích, giải hệ phương trình, v.v..

1) Rút gọn đa thức

Rút gọn phép tính căn sau đây :

$$\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right) + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}\right)$$

Có học sinh vừa đọc qua đề đã thấy ngán. Thực ra nếu chú ý thấy trong phép tính trên chỉ có hai dạng căn $\sqrt[3]{x}$ và $\sqrt[3]{x^2}$ thì ta có thể giả thiết $\sqrt[3]{x} = t$, do đó $\sqrt[3]{x^2} = t^2$, $x = t^3$ và do đó phép tính sẽ có dạng đơn giản hơn nhiều.

Đa thức ban đầu

$$= \frac{8-t^3}{2+t} : \left(2 + \frac{t^2}{2+t}\right) + \left(t + \frac{2t}{t-2}\right)\left(\frac{t^2-4}{t^2+2t}\right)$$

$$= (4 + 2t + t^2) : \frac{t^2+2t+4}{t+2} + \frac{t^2}{t-2} \cdot \frac{(t+2)(t-2)}{t(t+2)}$$

$$= t + 2 + t = 2t + 2$$

$$= 2\sqrt[3]{x} + 2$$

*2) **Biến đổi thành tích***

Biến đổi đa thức sau thành dạng tích : $(x + y - 2xy)(x + y - 2) + (1 - xy)^2$. Nếu nhân hai số hạng đầu với nhau sẽ thành đa thức bậc hai, rất phức tạp. Ta quan sát thấy trong đa thức có dạng $(x + y)$ và xy. Điều đó gợi cho ta đặt hai ẩn phụ : $x + y = a$ và $xy = b$. Vậy ta có :

Đa thức ban đầu $= (a - 2b)(a - 2) + (1 - b)^2$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$$

$$= (a - b - 1)^2$$

$$= (x + y - xy - 1)^2 = (x - 1)^2(y - 1)^2$$

Ví dụ khác : Biến đổi đa thức $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x + 5) - 6$ thành tích số. Đối với số hạng thứ nhất là tích của hai thừa số, thử nghĩ xem có mấy cách đặt ẩn số phụ ?

Cách thứ nhất đặt $y = x^2 + 3x$, ta có $(y + 4)(y + 5) - 6$

Cách thứ hai đặt $y = x^2 + 3x + 4$ ta có $y(y + 1) - 6$

Cách thứ ba đặt $y = x^2 + 3x + \frac{4 + 5}{2}$ ta có

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) - 6$$

Bạn đọc thử so sánh xem cách nào hay nhất.

*3) **Giải (hệ) phương trình.*** Cho phương trình

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

Giải sao cho gọn ? Ta thấy có hai số hạng chứa ẩn $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ và $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ làm ta liên tưởng đến hằng đẳng thức bình phương của tổng.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

Do đó ta đặt $y = x + \frac{1}{x}$, và $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

Vậy phương trình đã cho có dạng $6y^2 + 5y - 50 = 0$

Giải ra được $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = -\frac{10}{3}$.

Như thế tức là biến phương trình phân thức thành phương trình bậc hai một ẩn, làm cho vấn đề được giải quyết dễ dàng.

Thay các giá trị trên vào phương trình đã cho.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}.$$

Rõ ràng đây là hai phương trình rất đơn giản, bạn đọc tự giải.

Ví dụ giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z + \sqrt{x + y + z + 1} = 11 & (1) \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} & (2) \end{cases}$$

Có thể bạn sẽ nghĩ rằng, từ phương trình (2) biến đổi x và y về z, thay vào phương trình (1) để chỉ còn một ẩn. Tất nhiên có thể làm như thế, nhưng sẽ phức tạp. Làm cách khác.

Quan sát phương trình (1) ta thấy dùng cách đặt ẩn số phụ tốt.

Đặt $\sqrt{x + y + z + 1} = u$, phương trình (1) sẽ có dạng

$$u^2 + u - 12 = 0$$

Giải ra được $u_1 = 3$, $u_2 = -4$ (bỏ nghiệm này)

Do đó : $\sqrt{x + y + z + 1} = 3$ nên $x + y + z = 8$

Từ (2) được $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 4} = \frac{8}{9}$

Ta được $x = 16/9$, $y = 8/3$, $z = \frac{32}{9}$.

Khi dùng phương pháp ẩn số phụ để giải bài tập, phải đặc biệt chú ý đến khoảng xác định của ẩn số phụ. Nói chung trong đề bài không trực tiếp cho khoảng xác định này. Nếu bỏ qua sẽ dễ mắc sai lầm.

Ví dụ trong đề trên ta đặt $\sqrt{x + y + z + 1} = u$. Vì $\sqrt{x + y + z + 1} > 0$ nên $u > 0$, do đó phải bỏ nghiệm $u_2 = -4$.

Bạn thử tìm xem, mấy đề dưới đây giải sai chỗ nào ?

Chứng minh : Khi x, y là số thực tùy ý khác không thì $3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10$ không phải số âm.

Chứng minh : Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = z$.

Đa thức đã cho $= 3z^2 - 8z + 4$, cho $\omega = 3z^2 - 8z + 4$

Vì biệt thức Δ của phương trình bậc hai

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 16 > 0$$

nên ω có thể nhỏ hơn không, do đó đa thức đã cho không nhất định là số không âm.

Thực tế thì đầu đề vốn không sai mà là do giải sai. Nguyên nhân là đã bỏ qua khoảng xác định giá trị của z.

Từ $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ có thể biết $z \geqslant 2$ hoặc $z \leqslant -2$.

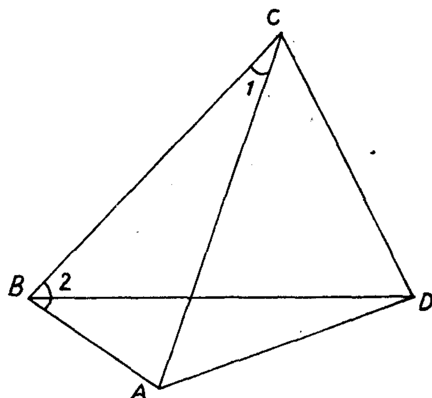
4. Phương pháp phản chứng

Muốn chứng minh một định lí, phương pháp thường dùng là xuất phát từ các điều kiện đã cho, dựa vào các định nghĩa, nguyên lí, định lí, dùng logic để suy diễn hay tính toán ra kết quả. Phương pháp đó gọi là phương pháp chứng minh trực tiếp. Nhưng có một số định lí, chứng minh trực tiếp rất khó khăn. Ví dụ đề toán sau.

Tứ giác lồi ABCD có AB + BD ⩽ AC + CD (hình 14-3)

Chứng minh $AB < AC$

Muốn chứng minh $AB < AC$, dựa vào định lí cạnh lớn tương ứng với góc lớn thì phải chứng minh $\hat{1} < \hat{2}$. Qua nhiều lần chứng minh, ta phát hiện hình như không thể trực tiếp làm thế được. Do đó nghĩ ngược lại, nếu $AB < AC$ thật, thì thử giả thiết xem $AB \geqslant AC$ kết quả sẽ ra sao ?

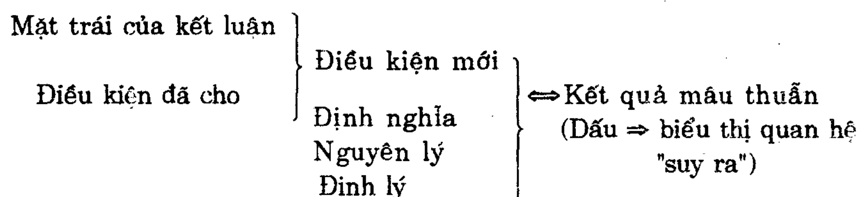


Hình 14–3

Nếu $AB \geqslant AC$ thì $\hat{1} \geqslant \hat{2}$. Do đó $\widehat{BCD} > \hat{1} \geqslant \hat{2} > \widehat{DBC}$ nên $BD > DC$. Từ đó suy ra $AB + BD > AC + CD$ mâu thuẫn với điều kiện đã cho. Sở dĩ mâu thuẫn vì giả thiết $AB \geqslant AC$ gây ra. Nên $AB \geqslant AC$ là sai, như vậy tức đã chứng minh kết luận của đề bài là đúng.

Chứng minh trên đây bắt đầu từ phủ định kết luận (giả thiết kết luận không thành lập) để suy ra mặt trái của kết luận là sai, và từ đó chứng minh tính đúng đắn của kết luận. Cách chứng minh đó gọi là phương pháp phản chứng.

Nội dung của phương pháp phản chứng có thể biểu diễn thành sơ đồ.



Khi dùng phương pháp phản chứng phải đặc biệt chú ý, điều kiện mới có hai phần hợp thành : điều kiện cũ + mặt ngược của kết luận cũ.

Phép phản chứng là một loại phương pháp chứng minh gián tiếp. Vì sao dùng phép phản chứng cũng chứng minh được tính đúng đắn của mệnh đề ? Đó là vì một mệnh đề gồm hai phần điều kiện và kết luận hợp thành. Với cùng điều kiện, kết luận và mặt ngược của kết luận không thể đồng thời đúng. Hoặc là kết luận đúng, hoặc là mặt ngược của kết luận đúng, trong hai cái chỉ tồn tại một. Cho nên ta chứng minh được mặt ngược của kết luận sai là đã chứng minh được kết luận đúng.

Phép phản chứng là một phương pháp toán học rất quan trọng. Khi ta dùng phương pháp chứng minh trực tiếp gặp khó khăn hoặc không thể chứng minh được, dùng phép phản chứng thường giúp ta chuyển bại thành thắng.

Dùng phép phản chứng thường trải qua ba bước :

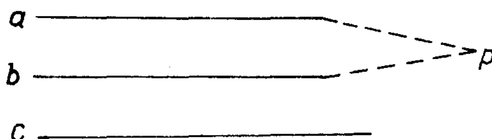
1) Giả thiết ngược lại (giả thiết kết luận của bài toán không đúng).

2) Xuất phát từ giả thiết đó, qua suy luận, chứng minh rút ra mâu thuẫn.

3) Từ mâu thuẫn khẳng định giả thiết không chính xác, từ đó khẳng định kết luận của bài toán là đúng.

Dưới đây nêu một ví dụ để làm rõ các bước cơ bản của phép phản chứng.

Cho biết đường thẳng a // c, đường thẳng b // c. Chứng minh a // b (hình 14–4).



Hình 14–4

Chứng minh : 1) Giả thiết ngược, nếu a không song song với b, a và b sẽ cắt nhau. Giả thiết cắt ở P.

2) Tìm ra mâu thuẫn : vì a // c, b // c nên qua điểm P có hai đường thẳng a, b cùng song song với c, như thế mâu thuẫn với định lí hai đường thẳng song song.

3) Kết luận : Đó là điều không thể được, nên a // b.

Nắm vững phương pháp phản chứng phải chú ý đến ba điểm chính như sau :

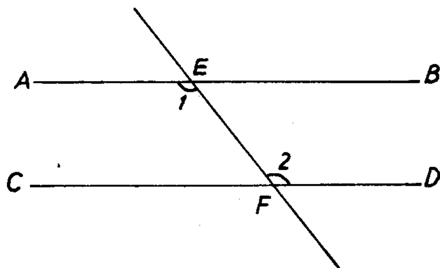
1) Giả thiết ngược : đây là bước then chốt của phản chứng, phải đặt giả thiết ngược chính xác.

Muốn thế phải làm rõ đối tượng của giả thiết ngược. Căn cứ vào yêu cầu của phép phản chứng, đối tượng của giả thiết ngược phải là kết luận của bài toán chứ không thể là một giả thiết khác.

Bạn thử phân tích xem các giả thiết ngược dưới đây đúng không.

1) Chứng minh nếu đường thẳng AB // CD thì $\hat{1} = \hat{2}$ (hình 14-5). Giả thiết AB ∦ CD

2) Biết 3 chia hết cho a^2, a là số nguyên. Chứng minh 3 chia hết cho a.



Hình 14-5

Chứng minh : giả thiết 3 không thể chia hết cho a^2.

Dễ biết rằng, các giả thiết trong hai phép phản chứng ở trên đã không phủ định kết luận của đầu bài mà lại phủ định điều kiện cho biết, cho nên đều sai cả.

Ngoài ra, giả thiết ngược phải chính xác, không trùng lặp, không bỏ sót. Ví dụ : ngược lại với "bằng nhau" là "không bằng nhau", cũng có thể dùng "lớn hơn" hoặc "nhỏ hơn" để biểu thị. Nếu chúng ta chỉ lấy "lớn hơn" để đối lập với bằng nhau là đã phạm sai lầm "bỏ sót", còn nếu lấy "không bằng nhau" hoặc nhỏ hơn thì lại phạm sai lầm là "trùng lặp".

Ta nên làm quen với những từ phủ định sau :

Từ ban đầu	Từ phủ định
Bằng nhau	Không bằng nhau (lớn hơn hoặc nhỏ hơn)
Lớn hơn	Không lớn hơn (nhỏ hơn hoặc bằng)
Nhỏ hơn	Không nhỏ hơn (lớn hơn hoặc bằng)
Song song	Không song song
Vuông góc	Không vuông góc (cắt xiên)
Điểm trên đường thẳng	Điểm ngoài đường thẳng
Điểm trên đường tròn	Điểm không nằm trên đường tròn (trong hoặc ngoài đường tròn)
Đều là	Không đều là
Và	Hoặc
Có	Không có
Duy nhất	Không duy nhất (tối thiểu có hai)
A và B	Không phải A hoặc không phải B
A hoặc B	Không phải A và không phải B.

Có một số đầu bài trong kết luận có từ "ít nhất" hoặc "nhiều nhất". Làm thế nào để phủ nhận những kết luận như thế. Ta xét ví dụ dưới đây.

Chứng minh bất kì tam giác nào cũng có ít nhất một góc trong không hơn 60^o.

Kết luận ban đầu là : "tối thiểu có một góc trong không nhỏ hơn 60^o". Hàm nghĩa của nó là "cả ba góc trong đều không nhỏ hơn 60^o" hoặc "chỉ có hai góc trong không nhỏ hơn 60^o" hoặc "chỉ có một góc trong không nhỏ hơn 60^o". Trong ba nghĩa đó phải có một cái. Rõ ràng mặt ngược của nó phải là "không có một góc trong nào không nhỏ hơn 60^o", tức là "ba góc trong đều nhỏ hơn 60^o". Phân tích như thế tự nhiên mặt ngược của kết luận đầu bài sẽ hiện rõ ra.

Câu phủ định của từ "nhiều nhất" cũng có thể theo kiểu phân tích như thế để tìm.

Kết luận và danh từ phủ định kết luận có mối quan hệ phủ định lẫn nhau. Ví dụ từ phủ định sự "bằng nhau" là "không bằng nhau".

2) Đưa về cái sai. Đưa về cái sai là hạt nhân của phép phản chứng. Ở đây đòi hỏi phải chú ý hai điểm.

Thứ nhất, trong quá trình chứng minh, nhất định phải lấy giả thiết ngược làm điều kiện, nếu không sẽ không dẫn đến mâu thuẫn.

Thứ hai, phải chứng minh mãi đến kết luận mâu thuẫn mới thôi. Có bốn trường hợp kết luận mâu thuẫn có thể xảy ra :

a. Mâu thuẫn với điều kiện đầu bài đã cho.

b. Mâu thuẫn với các định nghĩa, nguyên lí, định lí đã học.

c. Mâu thuẫn với giả thiết.

d. Mâu thuẫn lẫn nhau.

3) Kết luận : Kết luận là bước cuối cùng của phép phản chứng, cũng là kết quả cuối cùng của chứng minh. Bước này phải có, thiếu nó coi như chưa hoàn thành việc chứng minh. Phải chú ý không thể dùng kết luận trung gian để thay cho kết luận cuối cùng, cũng không được dùng một bộ phận kết luận để thay cho toàn bộ kết luận.

Học xong phép phản chứng, có học sinh cứ muốn thử dùng, kết quả ngược với mong muốn, vì để đó chứng minh trực tiếp dễ hơn. Vậy đề bài ra sao thì hợp với cách chứng minh phản chứng ? Đây là vấn đề rất khó nói. Nói chung, khi không thể chứng minh trực tiếp được thì dùng phản chứng. Cụ thể mà nói, chủ yếu có hai loại đề :

Loại đề thứ nhất là phải chứng minh tồn tại một yếu tố hay một tính chất nào đó. Loại đề này nếu xuất phát từ điều kiện đã cho để tìm ra kết luận rất khó, nếu dùng phản chứng, cho thêm giả thiết mới (mặt trái của kết luận) thì có thể tìm được khá nhiều kết luận, làm cho việc chứng minh thuận lợi.

Ví dụ "Chứng minh phương trình $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ chỉ có một nghiệm" hoặc "Trong cùng một đường tròn, các cung không bằng nhau thì khoảng cách từ dây cung đến tâm đường tròn cũng không bằng nhau".

Loại đề thứ hai là chứng minh không tồn tại một số yếu tố hoặc không có được một tính chất nào đó.

Ví dụ chứng minh các góc trong của một tam giác không thể có hai góc tù hoặc góc vuông.

Ví dụ khác, chứng minh số tự nhiên có dạng $4n - 1$ sẽ không phải là tổng bình phương của hai số tự nhiên.

Chứng minh : giả thiết với số tự nhiên n nào đó, cho $4n - 1$ bằng tổng bình phương hai số tự nhiên a, b tức là

$$4n - 1 = a^2 + b^2$$

Vì $4n - 1$ là số lẻ, cho nên a^2 và b^2 một số là lẻ, một số chẵn. Ta giả thiết a^2 là lẻ, b^2 là số chẵn, do đó a là số lẻ, b là số chẵn. Đặt $a = 2k - 1$, $b = 2t$ được

$$4n - 1 = (2k - 1)^2 + (2t)^2 = 4k^2 - 4k + 4t^2 + 1$$

tức $$2(n - k^2 + k - t^2) = 1$$

Vế trái của đẳng thức là số chẵn, vế phải là số lẻ, mâu thuẫn lẫn nhau. Cho nên số tự nhiên có dạng $4n - 1$ không thể biểu diễn thành tổng bình phương của hai số tự nhiên.

Đương nhiên, không phải tất cả những đề bài dùng phản chứng để chứng minh thì không thể chứng minh trực tiếp được, mà có những đề bài dùng cả hai cách đều được. Trong hình học có nhiều đề bài dùng cùng một phương pháp chứng minh (tức định lí thuận và định lí đảo đều được), cũng có thể dùng phản chứng để chứng minh. Ví dụ chứng minh một tam giác có hai đường phân giác bằng nhau thì đó là tam giác cân. Bài này vừa có thể dùng phản chứng, vừa có thể chứng minh trực tiếp.

Phép phản chứng là một loại phương pháp suy lí, nó vừa có thể dùng một cách riêng rẽ, vừa có thể dùng ở một phần nào đó xen vào toàn bộ chứng minh, tức là kết hợp sử dụng với các phương pháp khác.

Cuối cùng có một điểm cần nói rõ, chỉ có những đề dự kiện (điều kiện đã cho) là chính xác, hợp lí mới có thể dùng phép phản chứng. Đó là tiền đề đầu tiên để dùng phép phản chứng, nếu không thì không thể dùng được.

Ví dụ giải đề sau : Chứng minh đối với số nguyên dương bất kì p, nếu hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c + p = 0$ đều là số thực dương thì hệ số $a = 0$ (rút từ "Tuyển tập đề thi toán Ôlimpic Matxcơva" do Hội toán học tỉnh An Huy biên soạn năm 1979).

Chứng minh : Giả thiết $a \neq 0$, biệt thức của nghiệm là $\Delta = b^2 - 4a(c + p)$, vì p là số dương bất kì nên $a < 0$. Nếu không thì khi p đủ lớn sẽ có $\Delta = b^2 - 4a(p + c) < 0$, phương trình sẽ vô nghiệm.

Lúc đó $\sqrt{b^2 - 4a(p + c)} > b$. Từ công thức tìm nghiệm ta có

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(p + c)}}{2a}, \text{ trong đó}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(p + c)}}{2a} > 0 \text{ và}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(p + c)}}{2a} < 0$$

mâu thuẫn với giả thiết đã cho, nên $a = 0$ là đúng.

Song, những bạn đọc cẩn thận sẽ phát hiện thấy những điều kiện đã cho của bài toán mâu thuẫn với kết luận. Vì $ax^2 + bx + c + p = 0$ là phương trình bậc hai nên a không thể bằng không, mà kết lúận lại là $a = 0$ thì không còn là phương trình bậc hai nữa. Do đó điều kiện đã cho là không hợp lí, là sai. Chứng minh trên đây chỉ là sử dụng phép phản chứng trên hình thức mà thôi.

14. BÀI HỌC BẮT ĐẦU ĐỂ HỌC TỐT HÌNH HỌC PHẲNG

Hình học là môn khoa học nghiên cứu hình dạng, độ lớn và vị trí không gian của vật thể. Môn hình học phẳng ở phổ thông nếu

so sánh với kiến thức hình học ban đầu ở cấp một thì cả về nội dung lẫn phương pháp đều khác nhau rất xa. Qua sự nghiên cứu và chỉnh lí hệ thống các kiến thức về không gian của các thế hệ trước, ngày nay môn hình học đã trở thành một hệ thống lí luận hoàn chỉnh, thiên về môn khoa học suy lí và luận chứng.

"Mọi việc bắt đầu đều khó. Để học tốt hình học phẳng, trước hết phải học tốt bài học bắt đầu, tức chương đầu của hình học phẳng (đường thẳng, đường thẳng giao nhau và đường thẳng song song).

Dưới đây bàn về làm thế nào để học tốt những bài bắt đầu của hình học phẳng.

1. Tìm hiểu sơ bộ về nội dung

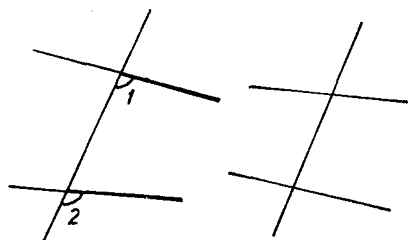
Chương thứ nhất chủ yếu nói về những kiến thức cơ bản của tính chất đường thẳng và vị trí của hai đường thẳng. Đó là bước chuẩn bị quan trọng để học hình học phẳng.

Xem qua nội dung của chương, có thể nêu ra sơ đồ sau :

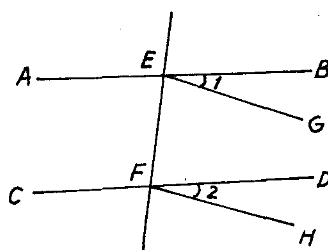
- Hình cơ bản
  - Đoạn thẳng
    - Đo độ dài đoạn thẳng
    - Vẽ đoạn thẳng
  - Tia-góc
    - Số đo của góc
    - Phân loại góc
    - Quan hệ hai góc
      - Quan hệ về số lượng
        - Góc bù
        - Góc phụ
      - Quan hệ về vị trí
        - Góc đối đỉnh
        - Góc đồng vị
        - ....
  - Đường thẳng
- Quan hệ vị trí của hai đường thẳng
  - Giao nhau
    - Cắt xiên
    - Cắt vuông góc
      - Tính chất của đường thẳng đứng
      - Cách vẽ đường thẳng đứng và đường phân giác thẳng đứng
  - Song song
    - Tính chất đường thẳng song song
    - Cách phán đoán đường thẳng song song

2. Hiểu đúng các khái niệm hình học

Hiểu đúng các khái niệm hình học là điều kiện tất yếu để học tốt hình học. Nhiều khái niệm hình học trong chương thứ nhất tuy đã học qua ở cấp một, nhưng yêu cầu ở cấp một thấp hơn cấp hai rất nhiều. Ở cấp hai yêu cầu học sinh phải dựa vào các định lí để mà chứng minh, do đó phải nắm chắc đặc trưng bản chất của khái niệm. Những đặc trưng bản chất này thiếu một cái là không được, nhiều cũng không được. Ví dụ khái niệm về góc đồng vị, đặc trưng bản chất của nó có hai cái : hai đường thẳng bị đường thẳng thứ ba cắt, vị trí hai góc giống nhau. Kết hợp các đặc trưng này với hình vẽ ta sẽ phát hiện góc đồng vị đều là góc chữ F (hình 15 - 1)



Hình 15–1



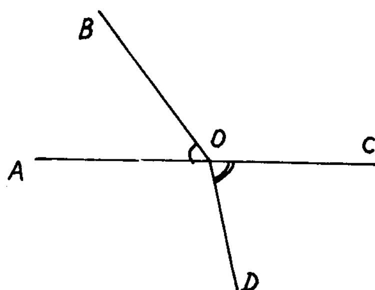
Hình 15 – 2

Nắm chắc được bản chất của khái niệm góc đồng vị, thì vấn đề tính chất và phán đoán đường thẳng song song sẽ ít phạm sai lầm. Ví dụ ở hình 15–2, vì $\hat{1} = \hat{2}$ nên EG // FH (góc đồng vị, hai đường thẳng song song).

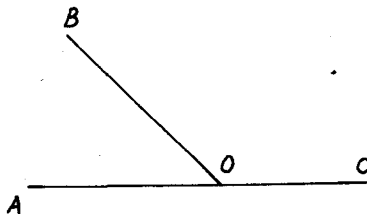
Tất nhiên, góc 1 và 2 không phải là đồng vị, vì đây phải là những góc có vị trí giống nhau được tạo nên sau khi một đường thẳng thứ ba cắt hai đường thẳng kia, nên nó không có dạng chữ F.

Làm sao để có thể hiểu được các khái niệm hình học một cách chính xác ? Chỉ cần làm được hai điểm sau : Thứ nhất, căn cứ vào hình vẽ để hiểu điều kiện của định lí ; thứ hai, thay đổi điều kiện, tìm thí dụ ngược lại để hiểu sâu hơn. Ví dụ đặc trưng bản chất của góc đối đỉnh là "hai cạnh của góc này kéo dài ngược lại

với hai cạnh của hai góc kia". Thử nghĩ xem, nếu sửa "hai cạnh" thành "một cạnh" thì sẽ ra sao, vẽ hình để thấy rõ.



Hình 15–3



Hình 15–4

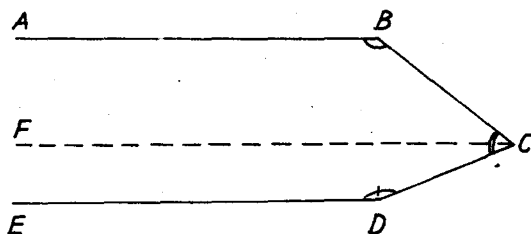
Trên hình 15-3 hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{COD}$ chỉ có cạnh OA là OC kéo dài ngược lại ; hình 15-4 hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ chỉ có OA là do OC kéo dài theo hướng ngược lại, rõ ràng chúng không phải là góc đối đỉnh.

3. Nói phải có căn cứ, phải chú trọng suy luận

Phải kết hợp với hình mà chứng minh, suy luận, đó là phương pháp tư duy riêng của môn hình học. Giải bài tập hình học vừa phải gắn chặt với hình vẽ, vừa phải thoát khỏi ảnh hưởng trực quan từ hình. Nếu trong dự kiện chưa cho, trong quá trình chứng minh cũng chưa suy luận ra được thì tuyệt đối không thể dựa vào hình vẽ mà kết luận một cách vô căn cứ. Điều này rất quan trọng đối với học sinh mới học hình học, ngay cả đối với học sinh học môn hình tốt cũng phải chú ý. Giải bài tập hình, nói là phải có căn cứ, chú ý suy luận. Vậy làm thế nào để đạt được như thế ?

Trước hết, phải hiểu rõ các căn cứ để giải bài tập hình học là các khái niệm, định nghĩa, nguyên lí và các định lí đã học, các dự kiện bài toán cho và những kết luận đã tìm ra được trong quá trình chứng minh. Nếu không tuân theo điều đó thì không còn phù hợp với các yêu cầu về làm bài tập hình học.

Chúng ta thử phân tích cách giải bài tập dưới đây (hình 15–5).



Hình 15–5

Cho biết : AB // ED, BC và CD cắt nhau ở C.

Chứng minh $\hat{B} + \widehat{BCD} + \hat{D} = 360^o$.

Có học sinh chứng minh như sau :

Qua điểm C vẽ CF // AB, CF // ED, vì $\hat{B} + \widehat{BCF} = 180^o$, $\hat{D} + \widehat{DCF} = 180^o$.

(hai đường thẳng song song, hai góc cùng phía bù cho nhau) nên $\hat{B} + \widehat{BCF} + \hat{D} + \widehat{DCF} = 360^o \Rightarrow \hat{B} + \widehat{BCD} + \hat{D} = 360^o$.

Thử suy nghĩ xem, trong chứng minh trên có phải mỗi bước đều có căn cứ không ? Rõ ràng vấn đề xẩy ra là ở chỗ vẽ đường thẳng phụ FC. Thử hỏi, có định lí nào nói "qua 1 điểm ngoài hai đường thẳng có thể vẽ một đường thẳng đồng thời song song với hai đường thẳng" không ? Không có. Về các đường thẳng song song chỉ có một tính chất cơ bản là (nguyên lí song song) là : "Qua một điểm ngoài đường thẳng có và chỉ có một đường thẳng duy nhất song song với đường thẳng đó". Cho nên bước thứ nhất của chứng minh là : qua điểm C vẽ đường thẳng đồng thời song song với AB và ED là không có căn cứ. Thực tế là ta chỉ có thể căn cứ định lí phán đoán đường thẳng song song để qua điểm C vẽ một đường thẳng song song với AB hoặc ED, sau đó căn cứ tính "lan truyền" của đường thẳng song song để suy luận mở rộng ra CF cũng phải song song với đường thẳng khác. Tuyệt đối không được dùng hình vẽ để thay thế cho điều cần chứng minh.

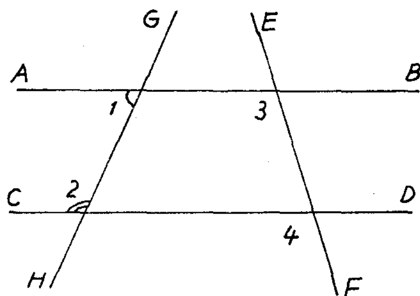
Cách chứng minh đúng đắn nên là :

Qua điểm C vẽ CF // AB, vì AB // ED (đã biết) nên CF // ED (trong cùng mặt phẳng, nếu hai đường thẳng cùng song song với

đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng này cũng song song với nhau).

...

Ngoài ra, không được nhảy bước chứng minh một cách tùy ý. "Nhảy bước chứng minh" ở đây có ý nói hai trường hợp : một là khi giải bài tập không viết ra những điều kiện có liên quan đã cho trong dự kiện. Xem ví dụ dưới đây.



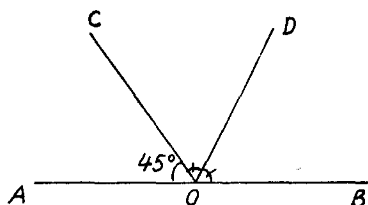
Hình 15–6

Cho biết các đường thẳng AB, CD bị các đường thẳng EF, GH cắt (hình 15–6). Góc $\hat{1} = 80^o$, $\hat{2} = 100^o$. Chứng minh $\hat{3} = \hat{4}$.

Có bạn chứng minh như sau : Vì $\hat{1} + \hat{2} = 180^o$ nên AB // CD (hai góc trong cùng phía bù nhau*, thì hai đường thẳng song song với nhau). Do đó $\hat{3} = \hat{4}$ (vì hai đường thẳng song song có hai góc đồng vị bằng nhau).

Trong chứng minh trên, bước thứ nhất "Vì $\hat{1} + \hat{2} = 180^o$" thiếu căn cứ. Vì sao ? Vì trong điều kiện đã cho không trực tiếp cho "$\hat{1} + \hat{2} = 180^o$" mà cho riêng rẽ $\hat{1} = 80^o$, $\hat{2} = 100^o$. Do đó $\hat{1} + \hat{2} = 180^o$ là tính toán ra, nó tất phải có điều kiện tiên đề. Cho nên đầu tiên phải viết ra "$\hat{1} = 80^o$, $\hat{2} = 100^o$", sau đó mới có được kết luận "$\hat{1} + \hat{2} = 180^o$". Mới học hình học, phải luôn đề phòng chứng minh tắt, chú ý tính chặt chẽ của tư duy.

Hai là chỉ chú trọng đến tính toán, coi nhẹ suy luận. Xin xem ví dụ dưới đây.



Hình 15–7

Cho biết, trên hình 15–7, O là điểm trên đường thẳng AB, $\widehat{AOC} = 45^o$, OD là phân giác của $\widehat{BOC}$. Tìm số đo của $\widehat{COD}$?

Có học sinh làm như sau : (180° - 45°) : 2 = 67°5

$\widehat{COD}$ = 67°5.

Quá trình giải ở trên hoàn toàn không có suy lí, chỉ viết ra những phép tính để tìm $\widehat{COD}$, nó không phù hợp với yêu cầu cơ bản của muôn hình là phải suy lí. Cách tìm đúng đắn nhất nên như sau :

Vì O là điểm trên AB (đã biết)

Nên $\widehat{AOC}$ + $\widehat{COB}$ = 180° (định nghĩa về góc bẹt)

Vì $\widehat{AOC}$ = 45° (đã biết)

nên $\widehat{BOC}$ = 135°. Vì OD là phân giác của $\widehat{BOC}$ (đã biết)

nên $\widehat{COD}$ = 135° : 2 = 67°5 (theo định nghĩa đường phân giác).

Chắc bạn đọc cho rằng viết như thế rườm rà quá. Đúng ! So với tính toán trực tiếp thì nhiều bước hơn, nhưng đó là những bước không thể thiếu. Bài tập hình học khác với bài tập đại số, phải như chứng minh hình học, cứ từng bước như thế mà viết rõ quá trình suy lí.

4. Suy lí đúng đắn

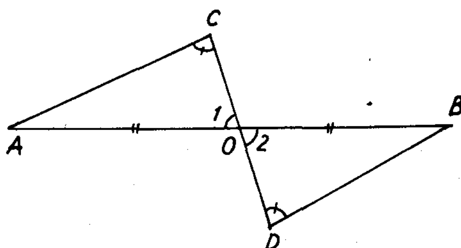
Suy lí chính xác bao gồm hai tầng ý nghĩa. Thứ nhất, mỗi bước suy lí phải đạt được quan hệ nhân quả. Ví dụ : " $\hat{1}$ và $\hat{2}$ là góc đối đỉnh nên $\hat{1}$ + $\hat{2}$ (góc đối đỉnh bằng nhau)", đó là sự suy lí đúng đắn. Vì " $\hat{1}$ + $\hat{2}$" là "kết quả tất nhiên của $\hat{1}$ và $\hat{2}$ là góc đối đỉnh".

Ngược lại "vì $\hat{1} = \hat{2}$, nên $\hat{1}$ và $\hat{2}$ là góc đối đỉnh" sự suy lí này có đúng đắn không ? Điều đó phải xem $\hat{1}$ và $\hat{2}$ có phải là góc đối đỉnh hay không chứ không phải là kết quả tất nhiên của $\hat{1} = \hat{2}$.

Ví dụ $\hat{1}$ và $\hat{2}$ đều là góc vuông nên thỏa mãn điều kiện $\hat{1} = \hat{2}$, nhưng $\hat{1}$ và $\hat{2}$ không phải là góc đối đỉnh. Trong chứng minh hình học, muốn bảo đảm suy lí chính xác thì phải đề phòng lấy kết luận trực quan từ hình vẽ để làm căn cứ suy

lí. Học sinh mới học hình học phải đặc biệt cẩn thận, hễ không chú ý là sai ngay. Xin xem ví dụ sau :

Cho biết O là điểm giữa AB, AC // BD, $\widehat{C} = \widehat{D}$, nối OC, OD (hình 15-8). Chứng minh OC = OD.



Hình 15-8

Có học sinh chứng minh như sau :

Vì O là điểm giữa của AB (đã biết), nên OA = OB (theo định nghĩa điểm giữa) Vì $\widehat{C} = \widehat{D}$ (đã biết)

nên $\widehat{1} = \widehat{2}$ (góc đối đỉnh bằng nhau).

Do đó ΔAOC = ΔBOD (góc, góc, cạnh).

Nên OC = OD (các cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau thì bằng nhau).

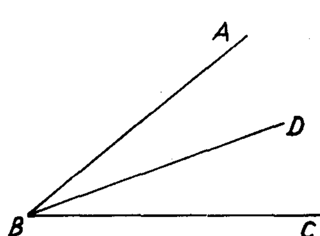
Đây là bài chứng minh sai ! Sai chỗ nào ? Sai ở bước $\widehat{1} = \widehat{2}$. Học sinh đó đã lấy căn cứ của bước này là "góc đối đỉnh bằng nhau". Thử nghĩ xem trong dữ kiện không cho C, O, D là ba điểm thẳng hàng, mà đó chính là điểm cần chứng minh.

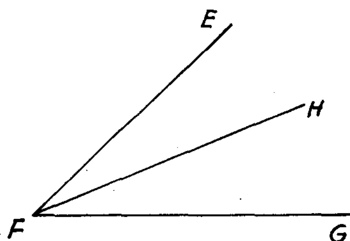
Thứ hai, ví dụ " Một nửa của hai đại lượng bằng nhau thì bằng nhau" và "hiệu của hai đại lượng bằng nhau trừ đi một số như nhau thì bằng nhau" là hai nguyên lí khác nhau, học sinh rất dễ bị lẫn lộn. Ví dụ xem ví dụ dưới đây.

Cho biết, hình 15-9, $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$; BD, FH là phân giác của hai góc đó. Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{HFG}$.

Chứng minh : Vì BD, FH là hai đường phân giác của hai góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{EFG}$ (đã biết), nên $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$, $\widehat{EFH} = \widehat{HFG}$ (theo định nghĩa đường phân giác). Vì $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ (đã biết) nên $\widehat{ABD} = \widehat{HFG}$ (hiệu hai lượng bằng nhau trừ đi một số bằng nhau thì bằng nhau).

Rõ ràng, bước cuối cùng $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ chú thích sai, vì nếu nói "hai đại lượng bằng nhau trừ đi một số bằng nhau thì bằng nhau"

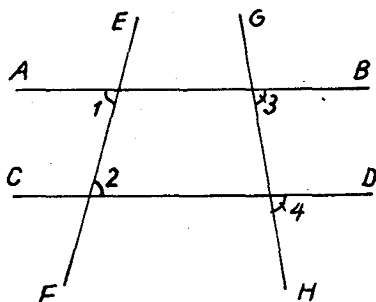




Hình 15–9

thì nên có điều kiện " $\widehat{DBC} = \widehat{EFH}$", nhưng trong chứng minh hoặc trong dữ kiện đều không có " $\widehat{DBC} = \widehat{EFH}$", nên căn cứ này là sai, nên đổi thành "một nửa của hai lượng bằng nhau thì bằng nhau".

Ngoài ra phải bảo đảm các chú thích chính xác và phân biệt rõ định lí chỉ tính chất hay định lí phán đoán, không được lẫn lộn.



Hình 15–10

Cho biết. Trên hình 15–10, $\hat{1} = \hat{2}$. Chứng minh $\hat{3} = \hat{4}$.

Chứng minh : Vì $\hat{1} = \hat{2}$ nên AB // CD (hai đường thẳng song song thì góc so le trong bằng nhau).

Nên $\hat{3} = \hat{4}$ (góc đồng vị bằng nhau, hai đường thẳng song song).

Dễ thấy rằng căn cứ của bước thứ hai "AB // CD" và bước thứ ba $\hat{3} = \hat{4}$ đều bị đảo ngược. Căn cứ của bước thứ hai nêu là định lí phán đoán về đường thẳng song song tức là "góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng song song, còn bước thứ ba nên chú thích định lí tính chất "hai đường thẳng song song thì góc đồng vị bằng nhau".

Học sinh mới học hình học, chỉ cần làm theo bốn yêu cầu nói trên một cách cẩn thận thì nhất định đã mở đầu một cách tốt đẹp.

15 - BÀN VỀ BẮT ĐẦU HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN NHƯ THẾ NÀO

Khi hồi tưởng lại cảm giác buổi ban đầu mới học hình học không gian, nhiều học sinh vẫn có cảm giác "bây giờ thì đã rõ, nhưng ban đầu rất lúng túng". Có học sinh nói "ban đầu không biết đường nào mà lần, không biết phải học ra sao". Cũng có học sinh nói "bắt đầu học hình học không gian cảm thấy rất lủng củng, suy nghĩ không đầy đủ, vẫn quen lối tư duy hình học phẳng để xét vấn đề". Để giúp cho học sinh cấp ba đỡ đi đường vòng, ở đây chúng tôi bàn về ban đầu học hình học không gian như thế nào.

Chương thứ nhất của hình học không gian là "đường thẳng và mặt phẳng". Đó là chương bàn về những khái niệm cơ bản và lí luận cơ sở của hình học không gian, là nội dung quan trọng của buổi ban đầu. Toàn chương có 21 điểm kiến thức, học hết chương này phải đạt được 5 yêu cầu sau :

- Hiểu chính xác, nắm vững những tính chất cơ bản của kết cấu không gian.

- Có thể vẽ để thể hiện được quan hệ vị trí của hai đường thẳng, hai mặt phẳng, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian với nhau.

- Có thể áp dụng chính xác các tính chất của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian để chứng minh và tính toán.

- Hiểu ngôn ngữ tập hợp và bước đầu vận dụng để có những suy lí đơn giản.

- Biết dùng phép phản chứng để chứng minh một số vấn đề đơn giản.

Dưới đây sẽ lần lượt nói rõ từng vấn đề.

1. Hiểu và nắm vững tính chất cơ bản của cấu trúc không gian

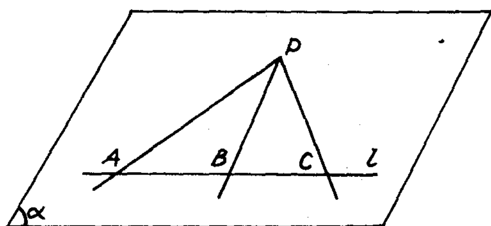
Mọi người đều biết "điểm" biểu thị một vị trí trong không gian, còn không gian là tập hợp vị trí tất cả các điểm có thể có. "Hai điểm khác nhau xác định một đường thẳng", kết cấu có tính liên kết này vẫn là kết cấu cơ bản nhất của không gian. Ví dụ : nguyên lí một nói "nếu hai điểm trên một đường thẳng cùng ở trong một mặt phẳng thì tất cả các điểm trên đường thẳng đều ở trong mặt phẳng đó". Tính chất này thực tế đã nói rõ bản chất đặc trưng của mặt phẳng là tính bằng phẳng. Do đó ta có thể gọi nguyên lí một là nguyên lí tính bằng phẳng của mặt phẳng. Nguyên lí này cho ta phương pháp phán đoán đường thẳng nằm trong mặt phẳng : biến sự phán đoán vô số điểm trên đường thẳng nằm trong mặt phẳng thành sự phán đoán hai điểm trên đường thẳng nằm trong mặt phẳng – từ vô hạn chuyển thành có hạn. Nguyên lí hai nói " nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì hai mặt phẳng đó có và chỉ có một đường giao tuyến chung đi qua điểm đó". Tính chất này phản ánh đặc tính của hai mặt phẳng cắt nhau. Ta có thể gọi đó là nguyên lí hai mặt phẳng cắt nhau. Hai mặt phẳng cắt nhau tất sẽ có giao tuyến đi qua một điểm chung. Một điểm cùng nằm trong hai mặt phẳng biến thành vô số điểm trên đường thẳng cùng nằm trong hai mặt phẳng, từ hữu hạn biến thành vô hạn. Nguyên lí ba nói "qua ba điểm không cùng nằm trên đường thẳng, có và chỉ có một mặt phẳng". Tính chất này nói lên qua ba điểm bất kì không nằm trên một đường thẳng đều tồn tại duy nhất một mặt phẳng. Tính chất này gọi là nguyên lí tồn tại mặt phẳng duy nhất. Nó cho ta điều kiện cơ bản nhất để xác định mặt phẳng. Như vậy, phàm những vấn đề liên quan đến mặt phẳng chung đều lấy điều này làm cơ sở để triển khai suy luận.

Ví dụ. Qua 1 điểm đã biết ngoài đường thẳng, nối với ba điểm nằm trên đường thẳng. Chứng minh ba đoạn thẳng này cùng nằm trong một mặt phẳng.

Xem hình 16-1, A, B, C $\in$ l, P $\notin$ l.

$$PA \cap l = \{A\}, PB \cap l = \{B\}, PC \cap l = \{C\}.$$

Chứng minh : Ba đoạn thẳng PA, PB, PC cùng nằm trong một mặt phẳng.



Hình 16-1

Chứng minh : vì P $\notin$ l ; A, B, $\in$ l, nên ba điểm P, A, B không cùng nằm trên một đường thẳng, do đó qua ba điểm P, A, B xác định được một mặt phẳng, giả thiết là α.

Vì A, B $\notin$ l và A, B $\in \alpha$ nên đường thẳng AB tức l $\in \alpha$.

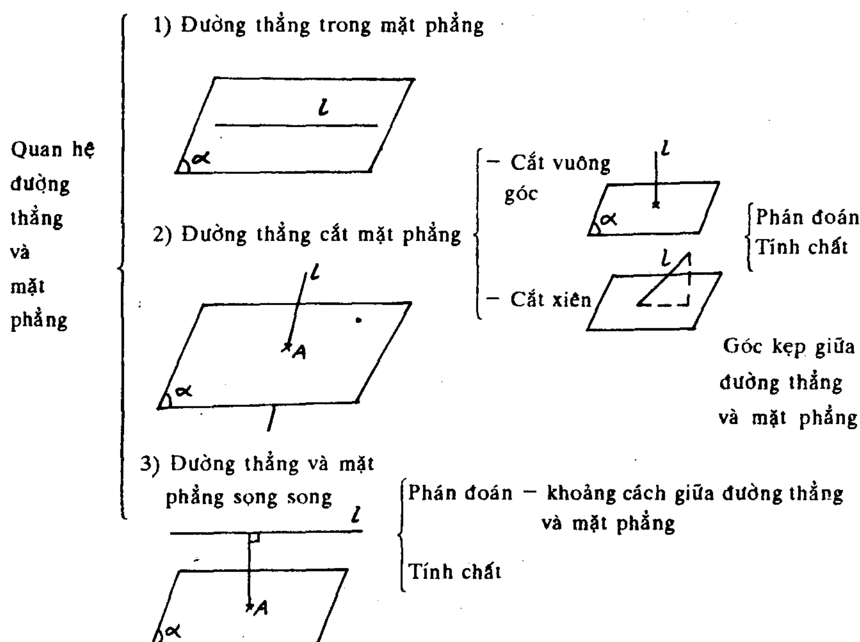
Vì C $\in$ l, nên C $\in \alpha$. Do đó PC $\in \alpha$, tức PA, PB, PC cùng chung mặt phẳng.

Trong quá trình chứng minh của bài này đã dùng đến nguyên lí bằng phẳng của mặt phẳng, thể hiện đầy đủ vai trò kết cấu liên kết hai điểm khác nhau trong không gian xác định một đường thẳng.

Cùng với quá trình học tập ngày càng sâu, kết cấu không gian sẽ được bổ sung, hoàn thiện dần. Các yếu tố cơ bản của toàn bộ kết cấu không gian không ngoài hai điểm : quan hệ vị trí và quan hệ số lượng (đo lường quan hệ vị trí). Nắm chắc hai yếu tố này, đầu óc ta sẽ tỉnh táo để hoàn thiện dần kết cấu không gian của mình. Ví dụ học về quan hệ vị trí của hai đường thẳng, trước kia trong hình học phẳng đã nghiên cứu quan hệ vị trí của hai đường thẳng trong cùng một mặt phẳng, bây giờ mở rộng ra, nghiên cứu quan hệ vị trí của hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng bất kì. Cách đo vị trí hai đường thẳng khác mặt phẳng như thế nào ? Chúng ta tự nhiên dễ dàng nhớ đến góc kẹp giữa hai đường thẳng khác mặt phẳng tức sự lệch hướng của hai đường thẳng khác mặt phẳng. Chỉ có góc kẹp giữa hai đường thẳng này

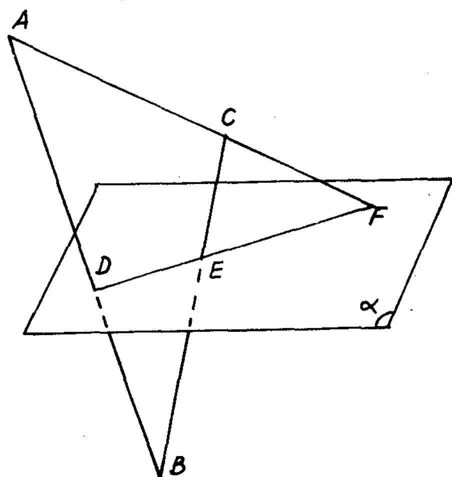
đã đủ chưa ? Qua phân tích ta biết được còn nên có một đại lượng biểu thị khoảng cách, đó là khoảng cách của hai đường thẳng khác mặt phẳng. Nghiên cứu đường thẳng và mặt phẳng cũng vậy, đầu tiên nghiên cứu về quan hệ vị trí của chúng, sau đó nghiên cứu quan hệ vị trí về mặt số lượng. Kết cấu sơ đồ hình cây dưới đây biểu thị kết cấu không gian của đường thẳng và mặt phẳng.

Quan hệ vị trí Quan hệ số lượng



Xem qua nội dung chương một thì không gian mà ta nghiên cứu là không gian kết cấu có tính liên kết. Nó có ba tính chất cơ bản : tính bằng phẳng (nguyên lí 1) giao nhau (nguyên lí 2) và tính tồn tại duy nhất của mặt phẳng (nguyên lí 3). Hình vẽ cơ bản là quan hệ vị trí và quan hệ số lượng của điểm, đường thẳng, mặt phẳng tức là song song, vuông góc, khoảng cách và góc kẹp. Nắm thật chắc tính chất cơ bản của kết cấu không gian và bốn đặc trưng hình học phản ánh quan hệ vị trí và quan hệ số lượng là mấu chốt để học tốt phần đầu hình học không gian. Học sinh mới học nên chú ý điều đó.

2. Xây dựng mô hình không gian cơ bản để tư duy vẽ hình và địa hình



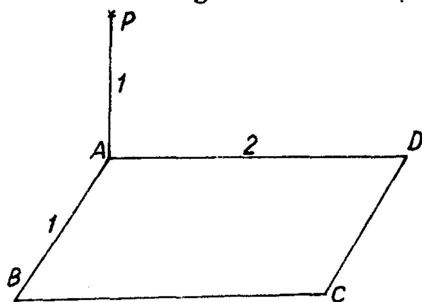
Hình 16–2

Học hình học không gian phải biết vẽ hình trực quan, muốn vẽ được hình không gian chính xác thì ngoài việc nắm vững những quy tắc cơ bản của hình trực quan ra, điều quan trọng nhất là phải dựa vào tư duy. Ví dụ cho ΔABC, AB ∩ α = {D}, BC ∩ α = {E} (hình 16–2). Tìm giao điểm của cạnh AC với mặt phẳng α.

Làm sao để xác định được giao điểm của cạnh AC với mặt phẳng α ? Chỉ kéo dài AC chưa đủ để xác định giao điểm. Do đó ta phải kết hợp các điều kiện đã biết và hình vẽ để phân tích.

Vì AB ∩ α = {D}, BC ∩ α = {E}, như vậy mặt phẳng ABC ∩ α = {DE}. Giả thiết cạnh AC cắt mặt phẳng α ở F, F vừa thuộc mặt phẳng ABC, vừa thuộc mặt phẳng α, nên F là điểm chung của hai mặt phẳng đó. Theo nguyên lí hai mặt phẳng cắt nhau thì F ∈ DE. Cho nên F là giao điểm của AC và DE. Vậy cách vẽ là nối DE, kéo dài cắt AC kéo dài ở F. F chính là giao điểm của cạnh AC với mặt phẳng α.

Ví dụ khác, trên hình 16–3 PA ⊥ hình chữ nhật ABCD, PA = 1, AB = 1, AD = 2. Tìm khoảng cách từ P đến CD ?

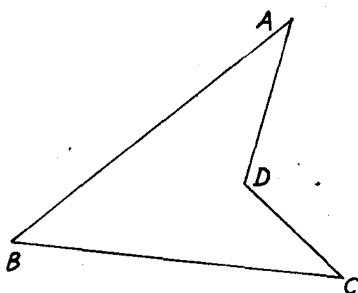


Hình 16–3

Rõ ràng muốn tìm khoảng cách từ P đến CD thì trước hết phải qua P vẽ đường vuông góc với CD.

Vấn đề là chân đường vuông góc trên CD ở chỗ nào ? Cho nên phải phân tích điểm đó.

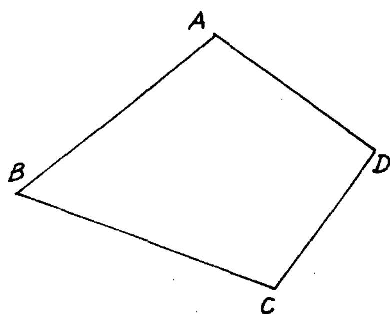
Theo đầu bài PA ⊥ ABCD, AD ⊥ CD. Từ định lí ba đường thẳng vuông góc có thể biết được PD ⊥ CD tức PD là đoạn thẳng vuông góc với CD, D là chân đường vuông góc đó.



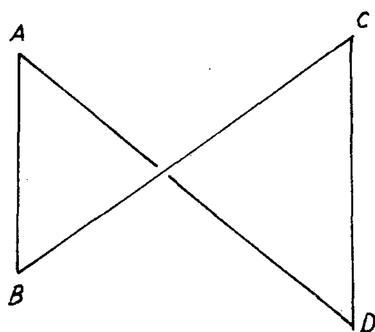
Hình 16–4

$$PD = \sqrt{5}.$$

Vẽ hình phải dựa vào tư duy, đọc hình càng phải gắn chặt với tư duy, đó là vì đọc hình ở đây không phải là thưởng thức mĩ thuật, cũng không phải là hình học phẳng như ở cấp hai. Đọc hình không gian là từ mặt phẳng tưởng tượng ra các yếu tố hình học (đường thẳng với đường thẳng, đường thẳng với mặt phẳng, mặt phẳng với mặt phẳng) có vị trí ra sao trong không gian. Cho nên sự tưởng tượng này phải gắn chặt với cách tư duy được lí luận cơ bản về không gian chỉ đạo. Ví dụ : Quan sát tứ giác ABCD trên hình 16–4.



Hình 16–5



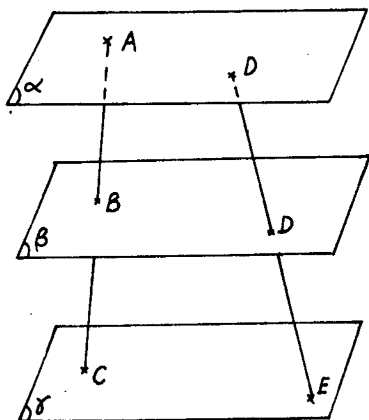
Hình 16–6

Đây là tứ giác trong hình học phẳng hay trong không gian ? Nếu hỏi học sinh cấp hai các em sẽ không do dự mà trả lời là tứ giác lõm trong mặt phẳng, còn ta sẽ khẳng định là tứ giác trong không gian. Vì sao ? Vì hai cạnh BC và CD giao nhau đã đủ để

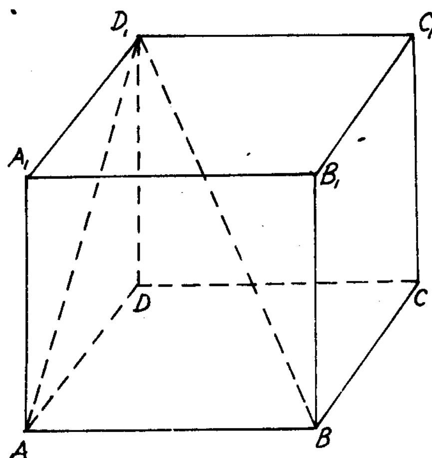
xác định mặt phẳng BCD, còn điểm A không nằm trên mặt phẳng BCD cho nên AB, AD đều giao với mặt phẳng BCD. Do đó trong hình học không gian, hai loại tứ giác dưới đây đều được xem là tứ giác không gian (hình 16-5 và 16-6). Chỉ cần nối BD (hoặc AC) thì sẽ hiện rõ hai mặt phẳng ABD và BCD (hoặc ABC và ADC) cùng cắt nhau.

• Đọc hình chính xác có tác dụng rất quan trọng trong giải bài tập.

Ví dụ. Các đường thẳng AC, DF bị ba mặt phẳng α, β, γ song song cắt như trên hình 16-7. Chứng minh $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Hình 16-7



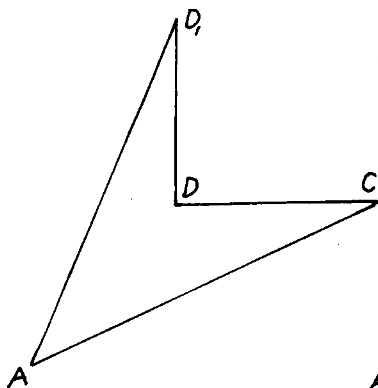
Hình 16-8

Quan sát hình vẽ có thể biết được 2 đường thẳng AC và DF là hai đường thẳng khác mặt phẳng. Do đó nối CD sẽ chuyển thành vấn đề đoạn thẳng tỉ lệ của tam giác để giải bài toán. Nếu nghĩ sai rằng AC và DF cùng trong một mặt phẳng do đó nối AD, BE và CF để được hình thang ACFD, rồi căn cứ đoạn thẳng tỉ lệ $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ thì rõ ràng là sai. Như thế tức là do đọc hình sai dẫn đến giải sai.

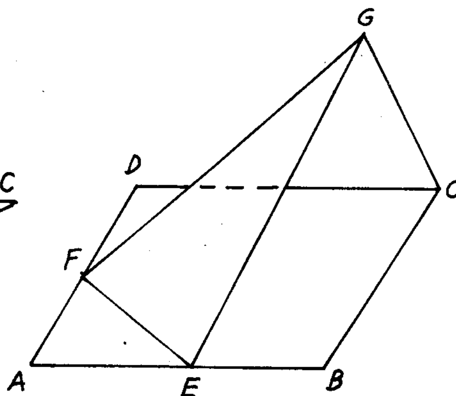
Hình không gian thiên biến vạn hóa. Song dù biến hóa ra sao, thì các quan hệ vị trí giữa đường thẳng và mặt phẳng đều có thể thông qua mô hình cơ bản là hình lập phương để phản ánh rõ. Dưới đây xin giải thích một cách ngắn gọn.

Trên hình 16–8 trong hình lập thể, ngoài quan hệ vị trí của các đường thẳng khác mặt phẳng, giữa các cạnh có song song, có cắt nhau (vuông góc) mà ta đã quen biết ; giữa cạnh và các mặt phẳng có đường thẳng nằm trong mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng và mặt phẳng cắt nhau (vuông góc) và giữa mặt phẳng với nhau có vuông góc và song song với nhau ra sao, ta có thể thêm hoặc bỏ bớt một số đường thẳng hoặc mặt phẳng trên hình để tạo ra các hình khác nhau. Ví dụ nối AD_1, BD_1 và B_1C có thể được các cặp đường thẳng khác mặt phẳng AD_1 và B_1C ; AD_1 và BB_1 ; ... , hoặc được các đường thẳng khác mặt phẳng như BD_1 và B_1C ; BD_1 và C_1C ; BD và CD ; ... Có thể chứng minh B_1C phải cắt mặt phẳng ABD_1 và tìm góc kẹp giữa chúng ; có thể tìm độ lớn góc nhị diện $D_1 - AB - D$.

Nếu xóa đi A_1, B_1, B, C_1, nối AD_1, AC, D_1C thì sẽ được tứ giác không gian D_1ACD. Có thể tìm khoảng cách từ D_1 đến cạnh AC, từ D đến mặt phẳng ACD_1, độ lớn góc nhị diện $D_1 - AC - D$ (hình 16–9).



Hình 16–9



Hình 16–10

Nếu xóa đi A_1, B_1, D_1, lấy E làm điểm giữa AB, F điểm giữa AD, G điểm giữa CC_1, tìm khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng GEF (giả thiết cạnh hình lập phương có độ dài là 4). Đây là đề thi vào đại học toàn quốc năm 1991. (Xem hình 16-10).

Các bạn học sinh nên thử xem, vẽ một số hình không gian mà thường ngày ít gặp và tìm các đại lượng hình học. Qua đó làm quen với cách giải các vấn đề liên quan với song song, vuông góc, tìm các khoảng cách và các góc. Đó là cách bồi dưỡng rất tốt cho năng lực suy luận và năng lực tưởng tượng.

3. Nắm vững phương pháp cơ bản - sự chuyển hóa giữa không gian và mặt phẳng

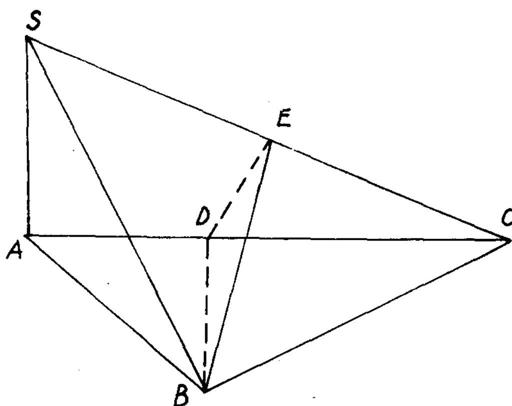
Chỉ cần phân tích các khái niệm, định nghĩa và định lí liên quan với song song, vuông góc, khoảng cách và góc kẹp trong không gian thì ta sẽ phát hiện ra trong đó đã ẩn chứa phương pháp cơ bản để giải quyết hình học không gian, đó là sự chuyển hóa các quan hệ vị trí trong không gian thành quan hệ vị trí trong mặt phẳng, tức là sự chuyển hóa giữa không gian và mặt phẳng. Ví dụ, định nghĩa góc giữa hai đường thẳng a, b khác mặt phẳng là "qua điểm O bất kì trong không gian vẽ các đường thẳng a' // a, b' // b thì góc nhọn (hoặc vuông) giữa a', b' là góc kẹp giữa a, b". Rõ ràng hai đường thẳng a', b' đi qua O cùng chung mặt phẳng. Hay ví dụ định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là "góc nhọn hình thành bởi đường thẳng và hình chiếu của nó trên mặt phẳng tạo thành". Rõ ràng đường thẳng và hình chiếu của nó trên mặt phẳng cùng chung mặt phẳng. Đối với khái niệm góc nhị diện tuy định nghĩa là "hình được cấu tạo bởi hai nửa mặt phẳng cùng xuất phát từ một đường thẳng". Nó không phải là hình phẳng nhưng độ lớn của góc nhị diện lại dùng góc phẳng để đo. Định lí cũng thế. Từ đường thẳng song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng, ta có thể suy ra đường thẳng đó song song với mặt phẳng, ngược lại, từ đường thẳng song song với mặt phẳng ta có thể suy ra đường thẳng này song song với giao tuyến của

mặt phẳng đi qua nó với mặt phẳng kia. Tóm lại, từ đường, đường song song suy ra đường thẳng và mặt phẳng song song ; đường thẳng và mặt phẳng song song suy ra đường và đường song song. Từ đó có thể thấy rõ sự chuyển hóa lẫn nhau giữa quan hệ vị trí không gian và quan hệ vị trí mặt phẳng.

Nắm vững phương pháp cơ bản cách giải quyết sự chuyển hóa hình học giữa không gian và mặt phẳng rất có lợi cho việc nâng cao năng lực tưởng tượng không gian và năng lực suy luận, chứng minh, tính toán không gian.

Ví dụ : Biết SA ⊥ mặt phẳng ABC, AB ⊥ BC, D ∈ AC, DE ⊥ SC, E là trung điểm SC, SA = AB = a, BC = $\sqrt{2}$a. Chứng minh : 1) SC ⊥ BD ; 2) Góc nhị diện E - BD - C = 60° (hình 16-11).

Phân tích : 1) Từ điều kiện đã cho có thể biết SC và BD là hai đường thẳng khác mặt phẳng. Chứng minh hai đường thẳng khác mặt phẳng vuông góc với nhau thường chuyển thành chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Kết hợp hình vẽ với các điều kiện đã cho, ta có thể tìm cách chứng minh SC ⊥ mặt phẳng BDE.



Hình 16-11

Tức SC ⊥ BD ⇐SC ⊥ mặt phẳng BDE (đường, đường chuyển hóa thành đường và mặt phẳng).

Phân tích thêm ta thấy : đã biết DE ⊥ SC, chỉ cần chứng minh SC ⊥ BE nữa là được (tức từ không gian chuyển thành mặt phẳng).

Chú ý đến E là trung điểm của SC, muốn chứng minh SC ⊥ BE thì phải chứng minh SB = BC. Ta đã biết SA ⊥ mặt phẳng

ABC, SA = AB = a, nên SB = $\sqrt{2}$a, mà BC = $\sqrt{2}$a theo giả thiết. Vậy SB = BC ⇒ ΔSBC cân. BE là đường cao nên BE ⊥ SC.

2) Muốn tìm góc nhị diện E – BD – C nên vẽ ra góc nhị diện. Quan sát hình vẽ ta thấy góc phẳng $\widehat{EDC}$ có điểm D trên BD là điểm đỉnh, còn hai cạnh phân biệt nằm trên hai nửa mặt phẳng BDC và BDE, do đó ta đoán góc phẳng $\widehat{EDC}$ có phải là góc nhị diện E–BD–C không ? Vấn đề biến thành chứng minh ED ⊥ BD và CD ⊥ BD.

Từ BD ⊥ SC (đã chứng minh ở trên), ED và SC chung mặt phẳng, muốn chứng minh ED ⊥ BD thì phải chứng minh BD ⊥ mặt phẳng SAC.

Tức ED ⊥ BD ⇐BD ⊥ mặt phẳng SAC (từ mặt phẳng chuyển thành không gian). Điều này dễ chứng minh vì SA ⊥ mặt phẳng ABC ⇒ SA ⊥ BD. Kết hợp với SC ⊥ BD sẽ suy ra BD ⊥ mặt phẳng SAC. Do đó biết được BD ⊥ CD. Vậy $\widehat{EDC}$ là góc phẳng nhị diện E–BD–C.

Tóm tắt lại như sau :

1) Vì SA ⊥ mặt phẳng ABC, nên SA ⊥ AB.

Vì SA = AB = a, nên SB = $\sqrt{2}$.a

Vì BC = $\sqrt{2}$a, E là điểm giữa SC nên BE ⊥ SC.

Lại vì DE ⊥ SC nên SC ⊥ mặt phẳng BDE, nên SC ⊥ BD.

2) Vì SA ⊥ BD, do đó BD ⊥ mpSAC.

nên BD ⊥ DC, BD ⊥ DE

Kết quả $\widehat{EDC}$ là góc phẳng nhị diện E–BD–C.

vì AB ⊥ BC, nên AC = $\sqrt{3}$a.

vì SA ⊥ AC, biết $\widehat{SCA} = 30^o$ nên $\widehat{EDC} = 60^o$.

Trong chứng minh trên có mặt phẳng chuyển sang không gian và cả từ không gian chuyển về mặt phẳng. Cần biết rằng sự chuyển hóa không phải bịa ra mà là sự lựa chọn logic bởi sự kết hợp giữa các điều kiện đã biết và các định lí mà đưa đến.

4. Khắc phục ảnh hưởng của lối tư duy hình học phẳng

Hình học không gian khác với hình học phẳng, nó nghiên cứu quan hệ vị trí và quan hệ số lượng của các đường thẳng và mặt trong không gian.

Trừ một số tính chất quan hệ vị trí của đường thẳng giống với hình học phẳng ra, đại bộ phận các tính chất khác đều không giống với hình học phẳng, nhất là những định lí về vị trí tương quan giữa đường thẳng với mặt phẳng, giữa mặt phẳng với mặt phẳng đều thuần túy thuộc về kết cấu không gian. Tuy nhiên cũng có những tính chất có thể so sánh với tính chất của hình học phẳng, nhưng không thể thay thế được phương thức tư duy của hình học không gian. Song vì mới tiếp xúc với hình học không gian nên thường bị ảnh hưởng của tư duy hình học phẳng dẫn đến những phán đoán hay suy luận sai lầm.

Dưới đây cử hai ví dụ sai.

Ví dụ 1. Phán đoán xem kết luận sau đúng hay sai.

1) Nếu khoảng cách từ hai điểm trên một đường thẳng đến một mặt phẳng bằng nhau thì đường thẳng đó nhất định song song với mặt phẳng.

2) Nếu hai đường thẳng đều vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng này vuông góc với nhau.

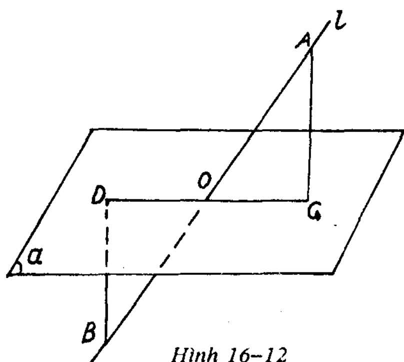
3) Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì chúng giao nhau.

Có học sinh cho rằng ba kết luận trên đều chính xác. Có đúng thế không ? Ta có thể cử ra những ví dụ ngược lại để nói rõ những kết luận trên đều sai.

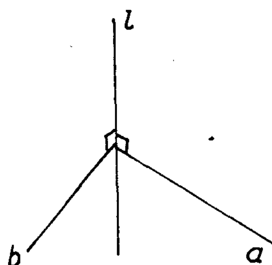
1) Nếu đường thẳng l cắt mặt phẳng a, thì ở hai bên khác nhau của mặt phẳng có thể lấy trên đường thẳng l hai điểm có khoảng cách đến mặt phẳng bằng nhau (hình 16-12).

Nguyên nhân sai là bị ảnh hưởng của tư duy hình học phẳng.

2) Trên hình 16-13, $b \perp l$, $a \perp l$, nhưng $a \not\parallel b$.



Hình 16–12



Hình 16–13

Nguyên nhân sai là vì bị ảnh hưởng của tư duy hình học phẳng "hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thứ ba thì chúng song song với nhau". Kết luận đúng là : "Hai đường thẳng tuy cùng vuông góc với một đường thẳng khác nhưng chúng có thể là song song, cắt nhau hoặc khác mặt phẳng với nhau".

3) Hai đường thẳng khác mặt phẳng có góc với nhau bằng 90° thì vuông góc mà không cắt nhau.

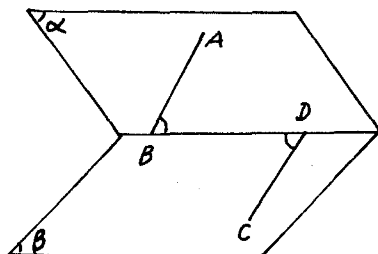
Nguyên nhân sai là vì bị ảnh hưởng của tư duy "hai đường thẳng cắt nhau thành góc vuông thì hai đường thẳng đó vuông góc với nhau".

Ví dụ 2. Cho biết hai đường thẳng AB và CD nằm trong hai mặt phẳng giao nhau α và β. B và D là 2 điểm trên giao tuyến l. Nếu $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ thì tương quan vị trí giữa AB và CD ra sao ? Hãy chứng minh kết luận của bạn (hình 16–14).

Giải : AB // CD.

Vì AB, CD bị l cắt, $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ là góc so le, nên AB // CD.

Phân tích. Đây là kết luận sai và suy luận sai, vì AB và CD khác mặt



Hình 16–14.

phẳng, $\widehat{ABD}$ và $\widehat{CDB}$ không phải là góc so le trong trong hình học phẳng. Cho nên không thể dùng định lí hình học phẳng về đường thẳng song song được.

Kết luận đúng là : AB, CD là hai đường thẳng khác mặt phẳng.

Dùng phép phản chứng chứng minh như sau :

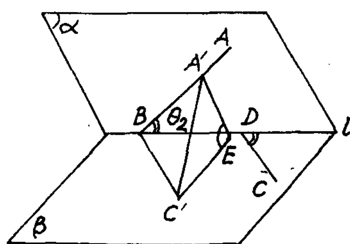
Nếu AB và CD cùng mặt phẳng, vì B, D $\in$ l, $\alpha \cap \beta$ = l, nên α và β trùng nhau, như thế mâu thuẫn với $\alpha \cap \beta$ = l. Do đó AB, CD khác mặt phẳng.

Ví dụ khác. Giả thiết góc nhị diện α–l–β là θ_1. $\widehat{ABD} = \widehat{CDB} = \theta_2$ $(0 < \theta_2 \leq 90^o.)$

Góc của hai đường thẳng AB, CD khác mặt phẳng là χ. Có :

$$\cos\chi = \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2\cos\theta_1.$$

Chứng minh : Qua điểm B trong β vẽ BC' // CD thì góc nhọn $\widehat{ABC'}$ là góc của hai đoạn thẳng AB, CD khác mặt phẳng tạo thành (nếu $\widehat{ABC'}$ là góc tù, thì lấy góc phụ của nó là $\widehat{ABC'}$), $\widehat{ABC'} = \chi$ (hình 16–15).



Hình 16–15

Giải : Giả thiết BA' = BC' = 1, trong mặt phẳng α vẽ A'E $\perp$ l.

Nối EC' , A'C'. Vì ΔA'BE = ΔC'BE, nên C'E $\perp$ l, có $\widehat{AEC'}$ là góc nhị diện của α–l–β. $\widehat{AEC'} = \theta_1$. Lại vì A'E = C'E = $\sin\theta_2$ nên trong ΔA'C'E :

$A'C'^2 = 2\sin^2\theta_2 - 2\sin^2\theta_2\cos\theta_1$, nên trong ΔA'B'C' có :

$$\cos\chi = \frac{A'B^2 + BC'^2 - A'C'^2}{2A'B.BC'} = \frac{2 - 2\sin^2\theta_2 + 2\sin^2\theta_2\cos\theta_1}{2}$$

$$= \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2\cos\theta_1.$$

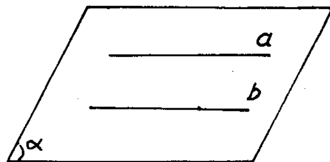
Từ hai ví dụ sai ở trên có thể thấy rõ, nguyên nhân căn bản sản sinh ra sự ảnh hưởng của tư duy hình học phẳng là trong đầu còn thiếu tưởng tượng không gian và chưa nắm vững các khái niệm đối với không gian. Cho nên muốn khắc phục được nhanh sự ảnh hưởng đó thì phải cố gắng ở hai khâu này. Để có đầu óc tưởng tượng không gian phong phú, học sinh có thể dùng que hoặc sợi thép làm thành những mô hình không gian, kết hợp với các khái niệm để đi sâu tìm hiểu, không nên ngại phiền, cứ làm thử chắc sẽ có lợi.

5. Sử dụng chính xác ngôn ngữ hình học và ngôn ngữ tập hợp

Trong hình học lập thể, ngôn ngữ hình học và ngôn ngữ tập hợp thường kết hợp xen kẽ sử dụng. Do đó sử dụng chính xác ngôn ngữ hình học và ngôn ngữ tập hợp đối với nâng cao năng lực suy luận, chứng minh là rất cần thiết.

Để sử dụng chính xác ngôn ngữ hình học và ngôn ngữ tập hợp thì điều cốt yếu đầu tiên là phải hiểu chính xác ý nghĩa hình học nội hàm của ngôn ngữ tập hợp. Tức là nói, khi dùng ngôn ngữ tập hợp để diễn đạt mối quan hệ giữa các tập điểm thì có thể dùng ngôn ngữ hình học để diễn đạt lại hàm ý của nó và có thể vẽ ra được hình vẽ không gian tương ứng.

Ví dụ : Hình 16-16 ngôn ngữ tập hợp là : "$a \cap b = \phi$, $a, b \subset \alpha$", ngôn ngữ hình học là : "đường thẳng a song song đường thẳng b".



Hình 16-16

Có lúc ngôn ngữ tập hợp sử dụng kết hợp với ngôn ngữ hình học, như 'a //b, $b \subset \beta$". Ngôn ngữ hình học của nó là : "đường thẳng a song song với đường thẳng b trong mặt phẳng β".

Sử dụng ngôn ngữ tập hợp có hai điểm tốt, một là ngắn rõ, hai là có thể dùng các phép tính và tính chất của tập hợp để suy luận dễ dàng. Dưới đây cử một ví dụ.

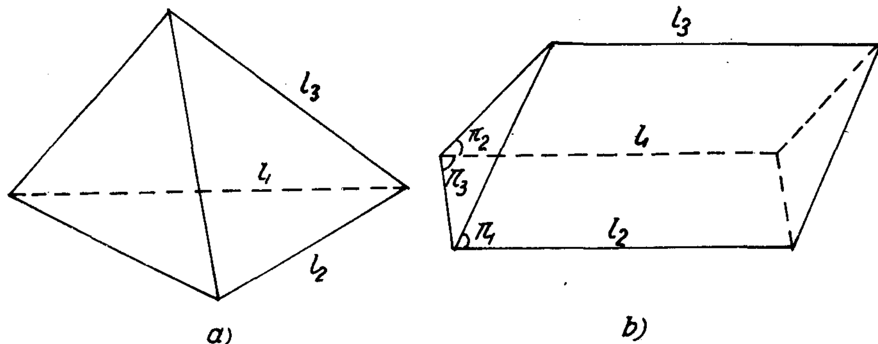
Có ba mặt phẳng giao nhau từng đôi một thành ba giao tuyến. Chứng minh : ba giao tuyến sẽ cắt nhau tại 1 điểm hoặc song song với nhau.

Giả thiết ba mặt phẳng là π_1, π_2, π_3, $\pi_1 \cap \pi_2 = l_3$, $\pi_2 \cap \pi_3 = l_1$, $\pi_3 \cap \pi_1 = l_2$.

Chứng minh : Giữa l_1, l_2, l_3 có hai khả năng sau :

1) Ba giao tuyến cắt nhau tại một điểm, tức $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \{p\}$.

2) Ba giao tuyến song song với nhau, tức $l_1 // l_2$, $l_2 // l_3$, $l_3 // l_1$ (hình 16–17).



Hình 16–17

Chứng minh : $l_1 \cap l_2 = (\pi_2 \cap \pi_3) \cap (\pi_3 \cap \pi_1) = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

Tương tự : $l_2 \cap l_3 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

$l_3 \cap l_1 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

cho nên $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.

Vì π_1, π_2, π_3 là các mặt phẳng khác nhau, cho nên tập giao ở trên chỉ có hai khả năng "điểm đơn" hoặc "tập không".

Tức : 1) $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \{p\}$

hoặc 2) $l_1 \cap l_2 = l_2 \cap l_3 = l_3 \cap l_1 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$

lại có $l_1, l_2 \subset \pi_3$; $l_2, l_3 \subset \pi_1$; $l_3, l_1 \subset \pi_2$ cho nên

$l_1 // l_2$, $l_2 // l_3$, $l_3 // l_1$.

Qua ví dụ trên chứng tỏ, nói chung đối với vấn đề song song dùng ngôn ngữ tập hợp để chứng minh tương đối ngắn gọn.

Muốn sử dụng ngôn ngữ tập hợp chính xác còn cần phải hiểu sâu sắc các tính chất cơ bản của kết cấu không gian, nếu không sẽ phạm sai lầm dịch trực tiếp một cách hình thức. Ví dụ "A là điểm chung của hai mặt phẳng α và β" thì không thể viết thành : "$\alpha \cap \beta = \{A\}$" mà phải viết là "$A \in \alpha$ và $A \in \beta$". Nguyên nhân là "hai mặt phẳng nếu có một điểm chung thì sẽ có đường thẳng chung đi qua điểm đó" (nguyên lí hai mặt phẳng cắt nhau). Ví dụ khác : "đường thẳng a song song với đường thẳng b, a // b" không được viết là "$a \cap b = \phi$", vì hai đường thẳng khác mặt phẳng cũng không có điểm chung. Định nghĩa đường thẳng song song là : "hai đường thẳng song song là hai đường thẳng trong cùng mặt phẳng không có điểm chung", nên cách viết chính xác là "$a \cap b = \phi$ và $a, b \subset \alpha$".

16 - HỌC CÁCH DÙNG CON MẮT TOÁN HỌC ĐỂ QUAN SÁT SỰ VẬT

Cách đây hơn 70 năm nhà khoa học Đức Weikna dưỡng bệnh ở nhà. Khi nằm trên giường, nhìn vào bức bản đồ thế giới treo ở mặt tường đối diện, phát hiện đường viền bản đồ các châu của thế giới tuy khấp khểnh như răng cưa nhưng có thể ghép khớp với nhau được. Ông ta cho rằng, các đại lục nguyên là một khối, sau đó vì vỏ trái đất di động mới bị "rách" và "trôi" đi, hình thành các châu lục và đại dương ngày nay. Do đó ông đưa ra "thuyết các đại lục trôi dạt". Học thuyết này rất phù hợp với các tư liệu khảo sát khoa học về sau, do đó được mọi người tiếp thu. Phát hiện của Weikna gợi ý cho ta điều gì ?

Thứ nhất, lúc xem bản đồ, ông ta có thái độ tìm kiếm tích cực và mục đích rõ ràng. Cách dùng mắt (hoặc máy móc) một cách có mục đích, hoạt động nhận thức một cách kiên trì này gọi là quan sát.

Thứ hai, Weikna quan sát bản đồ chủ yếu là hình dạng hình học, do đó đây là cách để quan sát nên được gọi là một loại hoạt động quan sát toán học.

Thứ ba, việc đưa ra học thuyết các đại lục trôi dạt nói lên một cách sinh động rằng, quan sát có một tác dụng to lớn trong phát hiện hoặc phát minh khoa học.

Quan sát là con đường quan trọng để ta nhận thức các sự vật chung quanh, thu nhận được các tri thức cần thiết. Sức quan sát chính là nguồn của hoạt động trí lực.

Quan sát khoa học không những có tác dụng to lớn trong phát hiện khoa học mà ngay trong học tập cũng có ý nghĩa rất cao. Có người đã làm thống kê, cho rằng 90% tri thức của một người là nhờ quan sát mà có. Từ một ý nghĩa nào đó mà nói, không chú ý quan sát, không biết quan sát là người mù trong học tập, sẽ bỏ mất những dịp đáng lẽ thu được kiến thức, đó là tổn thất to lớn.

Học toán phải gắn liền với quan sát. Muốn học tốt toán càng cần phải có khả năng quan sát. Trong học toán cần quan sát cái gì ? Nói một cách đơn giản, có hai loại : loại thứ nhất là dùng các kí hiệu (chữ số, chữ cái, các dấu toán, kí hiệu về quan hệ...) hoặc lời văn để biểu thị các công thức toán, định lí... ; loại thứ hai là đồ thị, hình vẽ, các hình hình học. ..

1. Làm sao để nâng cao khả năng quan sát

1) Nâng cao mục đích của quan sát. Quan sát trong toán học chủ yếu có hai mục đích, thứ nhất là thu được kiến thức mới ; thứ hai là vận dụng kiến thức để giải bài tập.

Mỗi khi thầy giáo viết ra công thức hoặc vẽ hình, chuẩn bị giảng vấn đề mới, nếu ta chú ý quan sát thì sẽ có sự phát hiện nào đó. Ví dụ : Quan sát : $10^3 \times 10 = 10^{3+1}$; $2^3 \times 2 = ... = 2^{3+1}$; $a^3 \times a = ... = a^{3+1}$. Chú ý đến cơ số và số mũ của hai vế, qua suy nghĩ ta sẽ có kiến thức mới : $a^m a^n = a^{m+n}$ (m, n là các số nguyên dương) và quy nạp được quy tắc "phép nhân hai lũy thừa có cùng cơ số là cơ số không đổi, cộng số mũ với nhau".

Cách quan sát này không những giúp ta nhận được kiến thức mới một cách thuận lợi mà còn phát triển được khả năng quan sát, cũng là đặt cơ sở cho sự sáng tạo trong học tập và công tác sau này.

Làm thế nào để nâng cao tính mục đích trong quan sát ?

Đầu tiên lúc nghe giảng, phải chú ý thầy giáo yêu cầu mình nhìn vào cái gì, suy nghĩ cái gì ; sau đó lúc giải bài tập, phải quan sát "quanh vấn đề" cần giải quyết. Như thế tính mục đích sẽ nâng cao. Mục đích quan sát càng cao, càng tập trung thì những tư liệu cần quan tâm đến càng chính xác, càng đầy đủ.

2) Nắm vững phương pháp quan sát khoa học. Nhà khoa học Nga – Paplôp rất coi trọng phương pháp quan sát khoa học. Ông nói "Trước hết nên học biết cách quan sát, không biết cách quan sát, vĩnh viễn không thể trở thành nhà khoa học được".

Bất cứ sự quan sát nào cũng bao hàm hai yếu tố : Yếu tố nhìn thấy và yếu tố tư duy. Khi quan sát vừa phải dùng mắt nhìn, vừa phải động não nghĩ. Nhìn và nghĩ đồng thời kết hợp. Sự kết hợp đó không những xuyên suốt trong quá trình quan sát mà nó phải kéo dài ra cả trước và sau khi quan sát. Như trên đã nói, trước khi quan sát phải xác định quan sát cái gì, trong quá trình quan sát phải quy nạp, phân tích các thông tin thu được, cố gắng đi đến những kết luận đúng đắn. Quan sát xong đi giải quyết vấn đề, sau đó lại suy nghĩ về kết quả đã quan sát được. Nắm vững phương pháp quan sát khoa học sẽ quan sát có hiệu quả. Trong học tập, phương pháp quan sát thường dùng chủ yếu là : quan sát đặc điểm cục bộ, quan sát toàn thể, quan sát từ nhiều phía, quan sát so sánh và quan sát phân tích.

2. Tiến hành quan sát toán học như thế nào

1) Tập trung sức tìm ra đặc điểm. Bất cứ sự quan sát nào, trước hết phải căn cứ mục đích quan sát, tập trung tìm ra đặc điểm của sự vật cần quan sát. Như thầy thuốc, để chữa bệnh hiệu quả phải

dùng mọi biện pháp để quan sát và tìm hiểu bệnh nhân. Họa sĩ muốn vẽ chân dung giống phải tìm ra đặc điểm của khuôn mặt.

Quan sát toán học cũng thế, phải tập trung tìm đặc điểm. Thông qua tìm đặc điểm sẽ phát hiện được quay luật và tri thức mới, và cách giải bài tập.

Vậy trong quan sát toán học cần chú ý những đặc điểm gì ?

Thứ nhất, quan sát các chữ số và đặc điểm của phép tính.

Ví dụ : số nguyên, số lẻ, số chẵn, số tự nhiên, số nguyên tố, số hữu tỉ, vô tỉ, v.v... Chúng đều có đặc tính khác nhau. Do đó, trong giải bài tập phải chú ý đến đặc điểm của các số đã cho và từ đó phát hiện ra mối liên hệ giữa các số. Mấy ví dụ dưới đây sẽ giúp bạn hiểu quan sát đặc điểm các số như thế nào.

Ví dụ 1. Tính $(-66)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{11}\right)+124\times(-37)+63\times(-124)$.

Đây là đề bài về phép tính số hữu tỉ, quan sát đặc điểm các số hạng của dãy tính, dễ thấy rằng, số hạng thứ nhất là tích của số nguyên với tổng các phân số, hai số hạng sau đều là tích của hai số nguyên. Đồng thời ta còn thấy : 66 là bội số của ba mẫu số : 2, 3, 11, còn hai số hạng sau đều có thừa số chung là 124. Do đó hình thành ra cách giải đơn giản :

$$\text{Dãy tính ban đầu} = -66\times\frac{1}{2}+66\times\frac{1}{3}-66\times\frac{1}{11}+124\times(-37-63)$$

$$= -33+22-6-12400=-12417.$$

Ví dụ 2. Tính 1990 × 19911991 - 1991 × 19901990.

Quan sát ta thấy dãy tính có hai đặc điểm : thứ nhất, thừa số trong tích của hai số hạng đều có tính luân phiên đối xứng ; thứ hai, trong hai số hạng đều có số nguyên dạng "abcdabcd", đặc điểm của dạng số nguyên này là có thể phân tích thành abcd × 10001. Do đó có cách giả :

$$\text{Dãy tính ban đầu} = 1990\times1991\times10001-1991\times1990\times10001.$$

$$= 0$$

Thứ hai, quan sát đặc điểm kết cấu của dãy phép tính.

Các dãy phép tính bao gồm các phép tính, đẳng thức, bất đẳng thức, phương trình v.v... chúng là chủ thể của thế giới toán học. Quan sát đặc điểm kết cấu của chúng để liên tưởng đến các công thức, định lí, phương pháp chứng minh sẽ có thể tìm thấy con đường ngắn nhất. Dưới đây cử hai ví dụ.

Ví dụ 3. Đơn giản biểu thức $(2a + 3b)^2 - (2a - 3b)^2$

Đặc điểm của phép tính là tổng hoặc hiệu của mỗi số hạng đều bình phương, đây lại là hiệu của hai số bình phương, còn cơ số $(2a + 3b)$ và $(2a - 3b)$ đối xứng nhau. Nếu áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ về hiệu hai bình phương thì sẽ giảm được số phép tính. Do đó có cách giải ngắn nhất là :

Biểu thức ban đầu $= (2a + 3b + 2a - 3b)(2a + 3b - 2a + 3b)$

$$= 4a \times 6b = 24ab.$$

Ví dụ 4 : Biết các số thực a, b phân biệt thỏa mãn $\frac{4}{a^4} - \frac{2}{a^2} - 3 = 0$ và $b^4 + b^2 - 3 = 0$. Tìm giá trị của biểu thức $\frac{a^4b^4 + 4}{a^4}$?

Ta quan sát thấy dạng của dữ kiện đều có kết cấu $()^2 + () - 3 = 0$. Điều đó chứng tỏ $\frac{-2}{a^2}$ và b^2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + x - 3 = 0$. Hơn nữa có $\frac{a^4b^4 + 4}{a^4} = b^4 + \frac{4}{a^4} = (b^2)^2 + \left(\frac{-2}{a^2}\right)^2$, nên biểu thức đại số cần tìm thực tế là tổng bình phương của hai nghiệm $\frac{-2}{a^2}$ và b^2.

Nhận biết được kết cấu của đẳng thức trong dữ kiện và kết cấu của biểu thức đại số cần tìm thì vấn đề sẽ trở nên rất đơn giản.

Theo định lí Viét có : $\left(b^2\right)^2 + \left(\frac{-2}{a^2}\right)^2 = \left(b^2 - \frac{2}{a^2}\right)^2 - 2b^2\left(-\frac{2}{a^2}\right)$

$$= 1 - 2.(-3) = 7$$

Quan sát đặc điểm kết cấu của dãy tính, trong biến đổi các công thức lượng giác rất quan trọng.

Ví dụ 5. Biết $\cos\theta + \cos^2\theta = 1$. Tìm giá trị của $\sin^2\theta + \sin^6\theta + \sin^8\theta$? Trong dữ kiện, vế trái là tổng của $\cos\theta$ và $\cos^2\theta$, vế phải là 1. Chuyển $\cos^2\theta$ sang phải để được $\cos\theta = \sin^2\theta$. Còn trong đa thức cần tìm đều có liên quan với $\sin^2\theta$. Do đó thay trực tiếp vào ta có :

$$\sin^2\theta + \sin^6\theta + \sin^8\theta = \cos\theta + \cos^3\theta + \cos^4\theta.$$

Chú ý đến $\quad$ $\cos\theta + \cos^2\theta = 1$, ta dễ nhớ đến cách biến đổi

$$\cos^3\theta + \cos^4\theta = \cos^2\theta\,(\cos\theta + \cos^2\theta) = \cos^2\theta.$$

Vậy : biểu thức ban đầu $= \cos\theta + \cos^2\theta = 1$

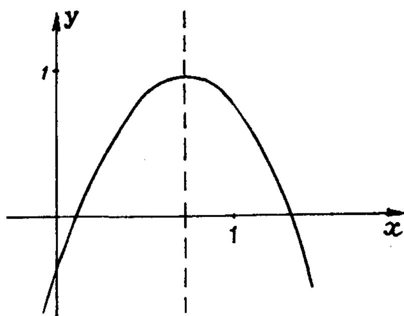
Nếu ta không chú ý quan sát đặc điểm kết cấu của dãy tính, mà chỉ biết căn cứ vào dữ kiện để giải phương trình bậc hai thì số phép tính sẽ rất nhiều.

Thứ ba, quan sát đặc điểm hình vẽ

Giải bài tập thường phải vẽ hình, nhất là bài tập hình hoặc khảo sát đồ thị hàm số. Do đó khi quan sát hình phải tìm ra đặc điểm liên quan với vấn đề đang cần giải quyết là rất quan trọng. Dưới đây là đề bài phải dựa vào đồ thị để giải.

Ví dụ 6. Biết đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ như hình 17-1 thì trong 6 biểu thức sau :

ab, ac, a + b + c, a − b + c, 2a + b, 2a − b, số biểu thức có giá trị dương (A) 2 cái (B) 3 cái, (C) 4 cái (D) 4 cái trở lên.



Hình 17-1

Đối với đồ thị hàm số bậc hai, nói chung nên quan sát đặc điểm có liên quan với tính chất của hàm số, đó là phía của đường cong, vị trí đỉnh, vị trí trục đối

xứng, giá trị điểm cắt trục tung, khoảng đồng biến (tăng hoặc giảm) v.v...

Riêng bài này, đồ thị đỉnh hướng lên trên thì $a < 0$; hoành độ điểm đỉnh ở giữa 0 và 1 tức $0 < \frac{-b}{2a} < 1$, $b > 0$, $2a + b < 0$, do đó $ab < 0$, $2a - b < 0$; đồ thị cắt trục tung ở $c < 0$, vì $a < 0$ nên $ac > 0$, $a - b + c < 0$; lại còn khi $x = 1$, $y = a + b + c > 0$.

Cho nên trong 6 biểu thức đại số chỉ có 2 cái là dương.

Thí dụ trên chứng tỏ, một cách giải ngắn gọn, hợp lí gắn liền với việc nắm vững đặc điểm của vấn đề cần giải quyết. Đương nhiên, muốn tìm đặc điểm là phải dựa vào kiến thức và kinh nghiệm vốn có của mình. Castơ nói một câu như sau : "Ta nhìn thấy chỉ là cái mà ta biết". Đúng là như thế. Ví dụ, giải "nếu $a + b - c = 0$, hay chứng minh hệ đường thẳng $ax + by + c = 0$ luôn đi qua một điểm cố định". Có học sinh nhìn ra ngay $a + b - c = 0$ thực tế là $-a(-1) - b(-1) - c = 0$ điều đó chứng tỏ điểm $(-1, -1)$ nằm trên hệ đường thẳng $-ax - by - c = 0$, tức $ax + by + c = 0$, cho nên hệ đường thẳng đó luôn đi qua điểm $(-1, -1)$. Còn đa số học sinh không nhìn ra đặc điểm của kết cấu này. Nguyên nhân ở đâu ? Nó liên quan đến chiều sâu hiểu biết của một người từ kết cấu để hiểu được điểm $p(x, y)$ trên đường thẳng $ax + bx + c = 0$. Từ một ý nghĩa nào đó mà nói, một người quan sát được cái gì là do anh ta đã vận dụng lí luận và tư duy ra sao quyết định.

2) Chú ý đến từng chi tiết. Khi quan sát toán học phải chú ý từng chi tiết, vì các đặc điểm có cái lộ ra, có cái ẩn. Chỉ có chú ý đầy đủ đến các chi tiết mới không bỏ sót những chi tiết có ích, mới có thể đi đến phân tích và phán đoán đúng đắn. Ví dụ : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = y + 4 & (1) \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

(Đề thi vào cấp III của học sinh Bắc Kinh năm 1985).

Giải hệ phương trình này đầu tiên phải quan sát đặc điểm. Lấy mẫu từ 1000 bài thi thì thấy 100% học sinh phát hiện thấy đặc điểm của phương trình (1) : (1) là phương trình bậc nhất hai ẩn dùng y để biểu thị x ; khoảng 30% số học sinh phát hiện thấy vế trái của (2) có thể phân tích thành thừa số. Do đó trước hết phân tích (2) thành $(x - 2y)(x - 3y) = 0$, tức biến đổi thành hai phương trình bậc nhất : $(x - 2y) = 0$ (3) hoặc $(x - 3y) = 0$ (4), sau đó kết hợp với (1) lập thành các hệ để giải phương trình bậc nhất hai ẩn. Đa số học sinh vì không chú ý đến chi tiết (2), vì vậy đều dùng phương pháp thay thế để triệt tiêu một ẩn thành $(y + 4)^2 - 5(y + 4)y + 6y^2 = 0$. Triển khai tiếp, đơn giản đi rồi giải phương trình bậc hai $y^2 - 6y + 8 = 0$. Làm như thế tất nhiên là rất dài dòng.

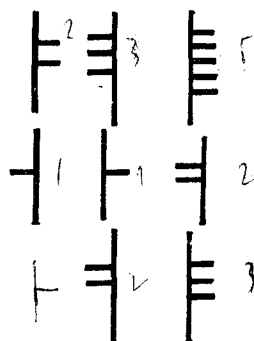
3) Từ tổng thể mà xét từng bộ phận. Trong quan sát, khi chú ý kĩ đến chi tiết thường lệch về quan sát bộ phận cá biệt của sự vật. Phải biết rằng, đặc điểm của sự vật là một cái gì mang tính toàn thể. Cùng một sự vật, xét trong phạm vi nhỏ và trong phạm vi rộng hơn kết luận chưa chắc đã như nhau. Giống như chuyện "người mù sờ voi", điều đó mách bảo ta một triết lí : không nên lấy một phần để khái quát lên toàn bộ. Do đó trong quan sát toán học đồng thời với sự chú ý đến từng chi tiết, còn phải từ tổng thể mà quan sát, từ tổng thể mà xem từng bộ phận. Chỉ có như thế mới nắm bắt được điều then chốt, tìm ra đặc điểm của sự vật.

Ví dụ : Đơn giản biểu thức $$\frac{\dfrac{2(1-x)}{1+x} + \dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2} + 1}{\dfrac{2(1+x)}{1-x} + \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2 + 1}$$

Nếu quan sát riêng rẽ tử số, mẫu số thì kết quả quan sát được chỉ là một phân thức rườm rà bình thường ; nếu kết hợp quan sát cả tử và mẫu số sẽ có phát hiện mới : ba số hạng của tử số và mẫu số vừa đúng là bình phương của một tổng. Nắm bắt được đặc điểm này, phương pháp tính toán sẽ rất ngắn gọn.

$$\text{Biểu thức ban đầu} = \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}+1\right)^2}{\left(\frac{1+x}{1-x}+1\right)^2} = \frac{\left(\frac{2}{1+x}\right)^2}{\left(\frac{2}{1-x}\right)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$$

4) Học cách so sánh. Quan sát so sánh giúp nắm nhanh sự giống và khác nhau giữa các sự vật, từ đó nắm bắt được bản chất sự vật. Trong quan sát toán học, những quan hệ toán học hay hình vẽ thường không chỉ có một cái, nên phải so sánh giữa chúng với nhau, so sánh sự khác và giống nhau, từ đó tìm ra mối liên hệ có tính quy luật giữa chúng.



Hình 17–2

Mùa hè năm 1984, trường đại học Côlômbia và đại học Boston ở miền đông nước Mĩ liên hợp tổ chức một lần "trắc nghiệm trí lực cao cấp", trong đó có một đề như thế này (thời gian trả lời không quá 2 phút, bạn thử xem).

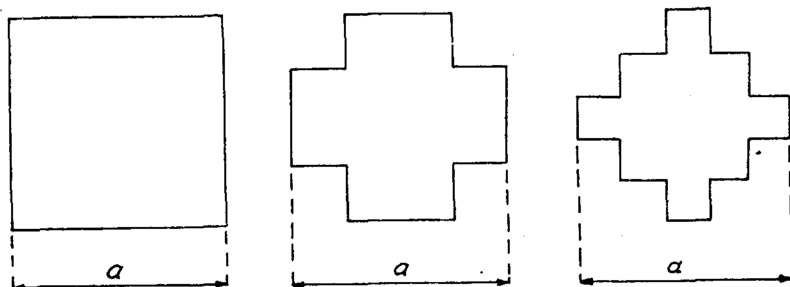
Căn cứ quy luật của cột 1 và 2 thì góc dưới bên trái nên vẽ hình gì ? (hình 17–2).

Muốn trả lời được thì phải quan sát so sánh giữa trái phải, trên dưới, từ toàn thể tổng hợp phân tích, ta sẽ biết được góc dưới bên trái cần vẽ hình " ├ ". Bạn thử nghĩ xem, vì sao ?

Quan sát dãy đơn thức x, $-2x$, $3x^3$, $-4x^4$... Thử viết ra đơn thức thứ 15 và thứ n.

Đối với mỗi đơn thức ta thấy gồm có ba bộ phận : hệ số, cơ số và số mũ cấu tạo thành. Do đó hãy quan sát từ ba bộ phận này. So sánh ba bộ phận của mỗi số hạng ta phát hiện, ngoài cơ số x cố định ra, hệ số và số mũ đều thay đổi theo số thứ tự, quy luật của chúng là hệ số bằng $(-1)^{n-1}n$. Đối với đơn thức thứ 15 là $15x^{15}$, thứ n là $(-1)^{n-1}nx^n$.

Ví dụ khác, quan sát các hình đa giác dưới đây (hình 17–3), rồi viết ra tính chất chung của chúng.



Hình 17-3

Vì phải chỉ ra tính chất chung của chúng, để tiện quan sát, ta chọn trong đó ra hình vuông đơn giản nhất, lấy nó làm chủ để liên tưởng đến các tính chất, đồng thời đối chiếu với hai đa giác kia để quan sát. Chúng ta rất nhanh nghĩ đến hình vuông bốn cạnh bằng nhau và vuông góc với nhau, chu vi là 4a, diện tích là a^2, nó là hình có trục đối xứng và trung tâm đối xứng, có 4 trục đối xứng, giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng. Đối chiếu với các đa giác (b), (c) ta được những tính chất chung của chúng là mỗi cạnh của hình đa giác bằng nhau ; vuông góc với nhau, chu vi đều bằng 4a, đều là hình có trục đối xứng và trung tâm đối xứng, đều có 4 trục đối xứng, một trung tâm đối xứng.

Nhà toán học Mĩ Pôlia ra một đề toán như sau : không dùng giấy và bút, chỉ dựa vào quan sát giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 30 & (1) \\ 2x + 3y + z = 30 & (2) \\ x + 2y + 3z = 30 & (3) \end{cases}$$

Ta quan sát chiều dọc, chiều ngang các hệ số của x, y, z của ba phương trình, dễ thấy rõ tổng hệ số của các ẩn bằng nhau đều là 6. Do đó cộng ba phương trình lại theo vế, đơn giản đi sẽ được : $x + y + z = 15$. Lại từ tổng thể quan sát quy luật thay đổi của hệ số x, y, z của ba phương trình, phát hiện thấy các ẩn số x, y, z trong ba phương trình luân lưu đối xứng. Căn cứ vào đó ta được

$x = y = z$ nên $x = 5$, $y = 5$, $z = 5$. Thực tế thì, nếu đầu tiên ta quan sát được ba phương trình x, y, z luân lưu đối xứng thì đối với phương trình bất kì nào, dùng x thay y và z ta sẽ được ngay $3x + x + 2x = 30$ tức $x = 5$. Tương tự, $y = 5$, $z = 5$. Rõ ràng không cần dùng giấy bút, chỉ dựa vào quan sát, nắm chắc đặc điểm là có thể giải ra ngay.

5) Thành thạo đi sâu quan sát. Quan sát không phải là bị động cảm nhận sự vật, cũng không phải là chú ý một cách tiêu cực mà là một quá trình tư duy tích cực. Bình thường người ta thích dùng từ "mắt thông minh" để chỉ người "biết nhìn", thạo quan sát. Điều đó chính là muốn nói người ấy tư duy tích cực trong quan sát, làm cho quan sát đi vào tầng sâu. Quan sát có sâu không, có thể phát hiện những đặc trưng ẩn giấu đằng sau các hiện tượng không là tiêu chí đo lường sức quan sát mạnh hay yếu.

Ví dụ : Giải đa thức sau : biết $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ Tìm giá trị của $x^{1987} + x^{1986} + x^{1985} + x^{1984} + x^{1983} + x^{1982}$.

Nếu ta dừng lại ở sự quan sát chung có lẽ chỉ biết được trong vế trái của dữ kiện và biểu thức cần tìm đều có 6 số hạng mà số mũ giảm dần theo bậc thang, còn vế phải dữ kiện bằng không. Theo quan sát so sánh còn biết thêm số mũ của 6 số hạng tương ứng với nhau trong dữ kiện và biểu thức cần tìm đều chênh nhau 1981. Tất cả những phát hiện này đối với việc giải đề vẫn chưa có tác dụng quyết định. Cần đi sâu quan sát hơn nữa. Có thể phân tích biểu thức cần tìm thành tích. Để xuất hiện x, giống với số hạng thứ hai đếm thì phải sang trái của vế trái dữ kiện, ta đặt x^{1981} làm thừa số chung. Do đó có :

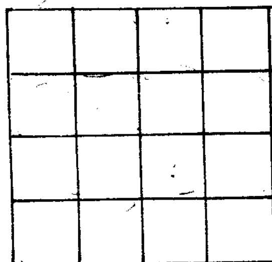
$x^{1987} + x^{1986} + ... + x^{1982} = x^{1981} (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)$. Tiếp tục quan sát vế trái dữ kiện ta phát hiện (tuy phát hiện tầm thường nhưng tác dụng không tầm thường).

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = -1$$

Nên được : $x^{1987} + x^{1986} + ... + x^{1981} = -x^{1981}$. Vấn đề cuối cùng trở thành tìm giá trị của x^{1981}. Sau đó lại kết hợp quan sát x^{1981} với điều kiện đã cho $x^6 + x^5 + ... + x + 1 = 0$. Cứ từng bước quan sát sâu thêm con đường giải quyết vấn đề ngày càng rõ. Mời bạn đọc suy nghĩ làm sao để từ điều kiện đã biết tìm ra giá trị x^{1981}.

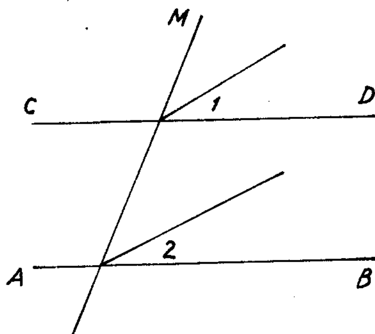
6) Tập thành thói quen quan sát. Muốn cho quan sát có hiệu quả, còn phải tập thành thói quen quan sát. Không nên quan sát không có đầu đuôi, mỗi nơi một tí, vì làm thế vừa lãng phí thời gian vừa khó thu được kết quả chính xác. Ví dụ quan sát hình 17-4 xem có bao nhiêu hình vuông ? Nếu bạn đếm một cách không có thứ tự, không những tốn thời gian mà còn đếm không đúng. Nếu trước khi đếm, tính toán xem cần đếm như thế nào thì sẽ vừa tiết kiệm thời gian vừa làm đúng quy luật.



Hình 17-4

Đương nhiên kế hoạch quan sát muôn màu muôn vẻ, ta đếm từ nhỏ đến lớn : Bước thứ nhất đếm các hình vuông nhỏ riêng lẻ có 16 cái ; bước thứ hai đếm mỗi hình có 4 hình vuông nhỏ ghép lại được 9 cái ; bước thứ ba đếm mỗi hình gồm 9 hình nhỏ ghép lại có 1 cái. Cho nên tất cả có : 16 + 9 + 4 + 1 = 33 hình. Lúc đếm cụ thể, thực tế không cần đếm từng cái mà kết hợp tính đối xứng của hình để tính là được.

Lúc quan sát có thể xuất hiện cảm giác sai, nhất là quan sát trên hình vẽ. Trừ trường hợp rất đặc biệt do nguyên nhân thị giác, tâm lí ra, còn chủ yếu là do sự non kém về tri thức gây ra. Như hình 17-5, $\hat{1} = \hat{2}$ vốn không phải là góc đồng vị mà nhìn sai thành góc đồng vị. Biện pháp tốt nhất để đề phòng cảm giác sai là xem kĩ, nghĩ nhiều, tìm cho ra căn cứ



Hình 17-5

Tóm lại, cần nỗ lực học cho được dùng con mắt toán học để quan sát, nâng cáo năng lực quan sát toán học của mình.

17 - NẮM VỮNG PHƯƠNG PHÁP NHỚ KHOA HỌC

Trí nhớ là chỉ sự việc đã trải qua còn giữ được trong đầu và quá trình tâm lí tái hiện. Sự việc đã trả qua nói ở đây là những sự việc người ta cảm biết được, đã suy nghĩ qua hoặc đã qua thể nghiệm.

Làm sao để có thể biết có nhớ được sự việc đã trải qua hay không ? Đầu tiên phải xem có thể "nhận ra" được không. Tức là khi sự việc cũ xuất hiện trước mắt thì có thể nhanh chóng phân biệt và nhận ra không. Ví dụ có bài tập như sau : trị số tuyệt đối là gì ? Không trả lời được, quên rồi. Nhưng nếu cho đáp án

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

thì thường là nhớ lại được ý nghĩa của trị số tuyệt đối. Đó tức là "nhận ra". Thứ hai, xem có thể "tái hiện" được không. Như trong ví dụ trên, nếu có thể trả lời chính xác được định nghĩa của nó, đó là "tái hiện". So sánh giữa tái hiện và nhận ra thì tái hiện phản ánh hiệu quả nhớ tốt hơn. Thứ ba, xem có thể "làm lại" được không, tức là khi cần có thể nhanh chóng đem những điều đã nhớ được ra vận dụng. Rõ ràng "làm lại" là mục đích cuối cùng của trí nhớ.

Những sự việc đã kinh qua của mỗi người không phải tất cả đều có thể nhớ lại. Không nhớ lại, hoặc nhớ lại sai gọi là quên. Quên là hiện tượng thông thường. Những việc đã kinh qua, nếu không dùng biện pháp cưỡng bức thì sẽ xẩy ra hiện tượng ban đầu quên chậm, về sau quên càng nhanh. Học toán đòi hỏi nhớ nhiều định nghĩa, định lí, công thức và phương pháp giải bài tập. Do đó muốn đấu tranh với cái quên thì phải nâng cao khả năng nhớ.

Tiêu chí trí nhớ tốt hay kém cũng chính là phẩm chất của trí nhớ. Nó được xét theo các mặt sau :

Độ rộng của trí nhớ tức là sự việc được cảm biết một lần, số lượng tái hiện chính xác được bao nhiêu. Ví dụ : thầy giáo đọc 1 lần 3824714596, sau đó để học sinh nhắc lại, có học sinh chỉ nói được 4–5 con số, có học sinh nhắc được cả 10 số, đa số nhắc được 8–9 số. Học sinh lớp thiếu nhi khóa 1 trường Trung học số 8 Bắc kinh trong một lần biểu diễn mẫu dùng 35 giây xem 1 lượt 117 chỗ khó nhớ với đề sau :

Một bình chứa được 49 lít nước, bình khác chứa 56 lít. Nếu đem nước ở bình hai đổ đầy bình một thì số nước còn lại trong bình hai bằng một nước dung tích của nó ; nếu đem nước trong bình thứ nhất đổ đầy bình thứ hai thì số nước còn lại trong bình thứ nhất bằng $\frac{1}{3}$ dung tích của nó. Tìm dung tích của mỗi bình ?

Sau khi xem xong, lập tức đọc lại đề một lần không sai sót gì cả. Điều đó cho thấy độ rộng sức nhớ về toán của học sinh thật đáng ngạc nhiên ! Độ rộng trí nhớ mạnh có thể làm cho ta nhanh chóng tư duy, gia công những tin tức chứa trong đại não để sản sinh ra những thông tin mới.

Tốc độ của trí nhớ là chỉ trong một đơn vị thời gian ghi nhớ được số lượng sự việc.

Duy trì trí nhớ là chỉ thời gian lưu giữ các sự việc trong đại não.

Độ chính xác của trí nhớ là chỉ mức độ chính xác lúc tái hiện.

Tính sẵn sàng của trí nhớ là chỉ mức độ nhảy cảm khi cần có thể rút ra và tái hiện được những chi tiết liên quan.

Ví dụ : Đơn giản $\left| 12\frac{19}{37} - 17\frac{23}{41} \right| - 7\frac{18}{37}$, có học sinh căn cứ đặc điểm của phép tính, lập tức nghĩ đến dùng định nghĩa của trị số tuyệt đối để đơn giản :

Phép tính ban đầu = $17\frac{23}{41} - 12\frac{19}{37} - 7\frac{18}{37} = 17\frac{23}{41} - 20 = -2\frac{18}{41}$.

Có học sinh đầu tiên tìm $12\frac{19}{37} - 17\frac{23}{41}$, lượng tính toán rất nhiều.

Vậy, những học sinh dùng cách tính thứ hai có phải là không biết căn cứ vào định nghĩa trị số tuyệt đối để đổi $\left|12\frac{19}{37} - 17\frac{23}{41}\right|$ thành $17\frac{23}{41} - 12\frac{19}{37}$? Không phải. Song lúc giải bài tập, có lẽ đã không quen nghĩ đến cách dùng định nghĩa giá trị tuyệt đối để biến đổi. Như thế là tính sẵn sàng kém. Ví dụ kiểu như thế rất nhiều. Ví dụ công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ hầu như ai đã học qua hàm số lượng giác đều nhớ, nhưng khi giải bài tập thì khả năng vận dụng khác nhau xa. Ví dụ : đơn giản biểu thức $\sqrt{1 - 2\sin x\cos x}$ có học sinh nhìn thấy 1 liền nhớ đến $1 = \sin^2x + \cos^2x$, có học sinh không nghĩ được dùng công thức đó.

Trí nhớ toán học vừa có liên hệ, mà có khác biệt với trí nhớ nói chung. Trí nhớ toán học là chỉ trí nhớ các vấn đề toán trong quá trình học toán. Đại thể nó bao gồm năm mặt sau :

1) Nhớ các chữ số, chữ cái và các loại kí hiệu phép toán, kí hiệu tính chất, kí hiệu hàm số.

2) Nhớ các công thức do các chữ số, chữ cái hoặc lời văn diễn tả, biểu thị.

3) Nhớ các hình hình học và đồ thị hàm số.

4) Các phương pháp tư duy giải bài tập, nhớ các dạng điển hình của phương pháp toán học.

5) Trong quá trình giải toán, tái hiện các điều nhớ được đã nói ở trên.

Phương pháp nhớ khoa học có thể nâng cao hiệu suất nhớ. Dưới đây giới thiệu mấy phương pháp nhớ thường dùng.

Phương pháp nhớ theo qui luật. Ví dụ nhớ ý nghĩa trị tuyệt đối như thế nào ? Điều đó đối với học sinh mới học chắc cũng hơi khó. Chúng ta có thể nhớ như sau : vì số hữu tỉ, sẽ hoặc số dương, hoặc số không, hoặc số âm. Cho nên ý nghĩa trị tuyệt đối của số hữu tỉ chia thành trị tuyệt đối của số dương, trị tuyệt đối của số không, trị tuyệt đối của số âm và nói rõ "trị tuyệt đối của số dương là bản thân nó, trị tuyệt đối của số không là không, trị tuyệt đối của số âm là số đối của nó". Phương pháp nhớ ý nghĩa tuyệt đối theo phương pháp căn cứ sự phân loại số hữu tỉ này chính là cách nhớ theo qui luật.

Cách nhớ theo qui luật ứng dụng rất phổ biến. Ví dụ trong hàm số lượng giác đã học $90^{\circ} \pm \alpha$, $180^{\circ} \pm \alpha$, $270^{\circ} \pm \alpha$ và 360°, để tiện nhớ các công thức của 4 hàm số lượng giác (sin, cos, tg, ctg) đối với 7 loại góc trên kia, có người đã qui nạp tổng kết thành qui luật hàm số lượng giác của "góc bội của 90° thêm $\pm \alpha$ thì vẫn cùng tên với hàm số lượng giác của $90^{\circ} \pm \alpha$, tức là tên gọi không thay đổi, còn hàm số lượng giác của góc bội số lẻ 90° thêm $\pm \alpha$ thì tên gọi biến đổi thành hàm số kia (cùng cặp với nó). Còn dấu âm hay dương được quyết định bởi hàm số lượng giác đó nên lấy dấu gì. Qui luật đó được tóm tắt thành câu : "lẻ thì biến, chẵn thì không, dấu phải xem nó ở góc thứ mấy". Như thế nó vừa phản ánh đúng đặc trưng bản chất của công thức hàm số lượng giác, lại thuận miệng dễ nhớ.

Cách nhớ theo so sánh. Phương pháp dựa vào hai loại sự việc có tính tương tự nào đó để nhớ sự việc gọi là phương pháp nhớ so sánh. Ví dụ : định lí phán đoán hai tam giác đồng dạng và định lí phán đoán hai tam giác bằng nhau có chỗ giống nhau nào đó.

Hai tam giác bằng nhau	Hai tam giác tương tự
Hai cạnh tương ứng bằng nhau. Góc kẹp giữa hai cạnh đó bằng nhau.	Hai cạnh tương ứng tỉ lệ. Góc kẹp giữa hai cạnh đó bằng nhau.

Ba cạnh tương ứng bằng nhau ← Ba cạnh tương ứng tỉ lệ.

Do đó nhớ định lí hai tam giác đồng dạng có thể so sánh với phương pháp nhớ định lí hai tam giác bằng nhau : (CGC) và (CGC), (CC) và (CCC). Chỉ có điều trong định lí tam giác đồng dạng quan hệ về cạnh không phải là bằng nhau mà là tỉ lệ với nhau. Ví dụ nữa một số định lí trong hình học phẳng và hình học không gian cũng có thể nhớ bằng phương pháp nhớ so sánh.

Hình học không gian		Hình học phẳng
- Hai mp cùng song song với mp thứ ba thì song song với nhau.	←	Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Hai mp cùng vuông gó với mp thứ ba thì song song với nhau.	←	Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Suy nghĩ xem có thể so sánh cách nhớ phương trình đường tròn

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ với phương trình đường elip có tọa độ trung tâm ở (x_0, y_0) ? với phương trình đường parabol ?

Cách nhớ theo thứ tự Phương pháp nhớ theo thứ tự vị trí của các bộ phận các tài liệu toán học gọi là phương pháp nhớ theo thứ tự. Ví dụ, công thức đổi cơ số của log : $\log_a^N = \dfrac{\log_c^N}{\log_c^a}$. Quan sát vế trái và phải của đẳng thức, N và a đều có thứ tự vị trí giống nhau. Cả hai vế đều N ở trên, a ở dưới. Theo thứ tự vị trí như thế thì sẽ không nhớ sai công thức log của tử và mẫu số trong công thức thay đổi cơ số log. Ví dụ khác : tính chất số tổ hợp $C_n^m = C_n^{n-m}$ và $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$. Đặc điểm thứ tự của công thức thứ nhất là : "chỉ số dưới không đổi, chỉ số trên của vế phải bằng chỉ số dưới trừ đi chỉ số trên của vế trái". Đặc điểm thứ tự của công thức thứ hai là : "ở vế trái, chỉ số dưới của hai số hạng giống nhau, chỉ số trên kém nhau 1", tổ hợp bên phải là "chỉ số dưới thêm 1, chỉ số trên lấy số lớn".

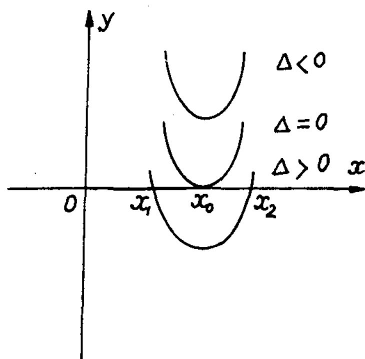
Cách nhớ theo thứ tự phải xác định rõ hướng của thứ tự. Ví dụ nhớ quan hệ tương ứng về sự thay đổi đồ thị hàm số và dạng giải tích của hàm số.

$y = f(x - a)$ $(a > 0)$ biểu thị đồ thị hàm số dịch sang phải a đơn vị, thứ tự nhớ là : trong dấu ngoặc $x - a \rightarrow$ đồ thị dời sang phải a đơn vị.

Vậy làm sao để nhớ quan hệ đồ thị giữa $y = f(x + a)$ $(a > 0)$ và đồ thị $y = f(x)$? Ta biến đổi đồ thị $y = f(x + a)$ thành dạng $f(x - m)$ tức $y = f(x + a) = f[x - (-a)]$ do đó theo cách nhớ thứ tự, trong dấu ngoặc là $x - (-a)$ nên đồ thị dời sang phải $-a$ đơn vị tức dời sang trái a đơn vị.

Tổng hợp lại ta được cách nhớ thống nhất như sau : Trong dấu ngoặc $x - a$ là dời phải a đơn vị, $x + a$ là dời trái a đơn vị. ($a > 0$ thì thứ tự là một cái thuận, một cái ngược.

Cách nhớ theo hình vẽ. Kết hợp với hình vẽ hoặc đồ thị để nhớ các vấn đề toán học gọi là nhớ theo hình vẽ. Ví dụ giải bất đẳng thức bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ $(a > 0)$ có thể kết hợp đặc điểm của đồ thị hàm số bậc hai để nhớ sẽ rất dễ nhớ lâu.



Hình 18–1

Khi $\Delta < 0$, $x \in R$

Khi $\Delta = 0$ $\{x|_{x \neq x_0}\}$ là nghiệm của $ax^2 + bx + c$.

Khi $\Delta > 0$ $\{ x \mid x < x_1$ hoặc $x > x_2 \}$ $(x_1 < x_2)$ là nghiệm của $ax^2 + bx + c$.

Nếu bị quên chỉ cần vẽ ra đồ thị thì sẽ nhớ ra ngay.

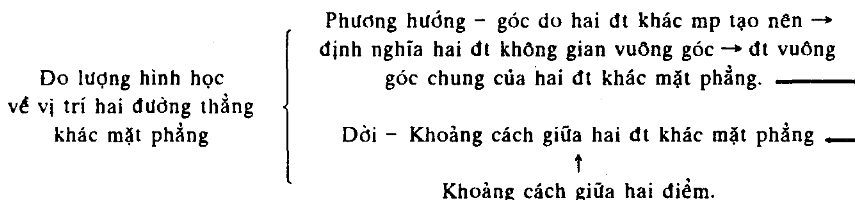
Làm thế nào nhờ đồ thị $y = \sin x$ để suy ra đồ thị $y = |\sin x|$, từ đó mà nhớ chu kì của $y = |\sin x|$ là π ?

Cách nhớ theo các trọng điểm. Tức là tìm ra những điểm cần nhớ của sự việc đó để nhớ. Ví dụ giải bài tập về tỉ lệ phối nồng độ, phương pháp thì có nhiều nhưng không nhất thiết phải nhớ tất cả mà tìm lấy phương pháp chính trong đó để nhớ. Trọng lượng

dung chất trước khi hỗn hợp = trọng lượng dung chất sau hỗn hợp.

Cách nhớ theo hệ thống. Hệ thống là gì ? hệ thống là gồm nhiều bộ phận theo một kết cấu nhất định hợp thành một vật hoàn chỉnh. Chức năng của hệ thống lớn hơn tổng chức năng của các bộ phận. Nhớ theo hệ thống là nói đem các sự vật rời rạc hợp thành một hệ thống, từ góc độ hệ thống mà nhớ được từng bộ phận.

Ví dụ. Khái niệm về khoảng cách giữa hai đường thẳng khác mặt phẳng là một khái niệm quan trọng trong hình học không gian. Ta xuất phát từ hệ thống logic của khái niệm để nhớ nó.



Ví dụ khác, nhớ cách tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng khác mặt phẳng, sau khi đã học rải rác các phương pháp, bây giờ tổ hợp lại thành một hệ thống phương pháp rồi nhớ nó sẽ rất có lợi cho việc nắm vững các điều kiện áp dụng của phương pháp đơn lẻ, sẽ nâng cao tính sẵn sàng của trí nhớ.

1) Cách trực tiếp, tức trực tiếp vẽ ra đường vuông góc chung của hai đường thẳng khác mặt phẳng và tìm được độ dài khoảng cách.

2) Chuyển đổi thành tìm khoảng cách giữa đt và mp song song nhau.

3) Chuyển đổi thành tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

4) Dùng công thức tìm khoảng cách giữa hai đt khác mp.

5) Phương pháp tìm giá trị cực tiểu của hàm số bậc hai.

Trên đây đã lần lượt giới thiệu các phương pháp nhớ, thực tế là để tăng cường trí nhớ, có thể sử dụng đồng thời nhiều phương

pháp. Như giá trị số tuyệt đối, đồng thời với nhớ theo qui luật, còn có thể nhớ theo hình vẽ : trên trục số, giá trị tuyệt đối của một số biểu thị khoảng cách giữa số đó với điểm gốc. Vì quan hệ vị trí của nó với điểm gốc có ba trường hợp khác nhau : ở bên phải điểm gốc, trùng điểm gốc và bên trái điểm gốc, do đó phải chia làm ba trường hợp để nói rõ ý nghĩa của trị tuyệt đối. Tự mình vẽ hình, ấn tượng sẽ rất sâu.

18 - BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC KHÁI QUÁT TOÁN HỌC

Đầu tiên ta phải làm rõ khái quát là gì ? Dưới đây có hai ví dụ.

Ví dụ 1. Trong một hộp đựng mẫu đá khoáng sản có mười mẫu đá hình dạng và màu sắc khác nhau đánh số từ A_1, A_2, A_3,... A_{10}, qua hóa nghiệm phân tích, mẫu đá A_1 có sắt, mẫu A_2 có sắt... mẫu A_{10} có sắt. Do đó rất tự nhiên đi đến kết luận : các mẫu đá trong hộp đều có sắt.

Ví dụ 2. Tính (+ 30) + (– 20) và (– 20) + (+ 30) ta đều được kết quả bằng 10, do đó có đẳng thức (+ 30) + (– 20) = (– 20) + (+ 30).

Thử thay hai phép tính khác. $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$, kết quả của tổng đều được $-\frac{5}{6}$, nên $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Từ đó ta thấy khi cộng hai số, nếu đổi vị trí của các số hạng, tổng vẫn không thay đổi.

Quá trình tư duy của hai ví dụ trên đều có một điểm chung, đó là từ trong những sự vật khác nhau, tìm ra những tính chất chung của chúng và qui kết lại, phương pháp tư duy này gọi là khái quát.

Trong cuộc sống và học tập, khắp nơi đều cần dùng đến phương pháp tư duy khái quát này. Đúng như đại văn hào Nga – Leptônstôi đã nói : "chỉ khi trí tuệ của con người tự khái quát hoặc đã kiểm tra sự khái quát, thì con người mới có thể hiểu được nó". Không có khái quát thì không có khoa học ; không biết khái quát là không biết cách học. Khả năng khái quát là khả năng học tập vô cùng quan trọng. Khả năng khái quát toán học là một khả năng khái quát đặc biệt. Nó chủ yếu là để chỉ khả năng khái quát các tài liệu về toán học, các quan hệ số lượng, quan hệ hình vẽ không gian và khả năng tính toán, khả năng khái quát các loại vấn đề và phương pháp giải bài tập.

Có hai phương thức để diễn đạt khái quát toán học, phương thức thứ nhất là dùng ngôn ngữ thường ngày để diễn đạt, một phương thức khác là dùng ngôn ngữ kì diệu toán học để diễn đạt.

Khái quát toán học đại thể bao gồm các mặt sau :

1. Khái quát các quan hệ toán học

Các quan hệ toán học thường gặp có mấy loại :

Quan hệ thứ tự, như quan hệ thứ tự giữa hai số thực $a > b$, $a = b$, $a < b$. Thứ tự vị trí của ba điểm trên đường thẳng : A, B, C ; A, C, B ; B, C, A ; B, A, C ; C, A, B ; C, B, A.

Quan hệ cố định, như qui tắc các phép tính, công thức, qui tắc và định lí biểu thị các đại lượng bằng nhau, định lí Pitago...

Quan hệ thay đổi, biểu thị quan hệ các đại lượng không bằng nhau, như tổng hai cạnh bất kì của tam giác luôn lớn hơn cạnh thứ ba ; hiệu hai cạnh bất kì nhỏ hơn cạnh thứ ba ; $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, trong đó $a, b \geq 0$, v.v...

Quan hệ tương ứng, ví dụ quan hệ tương ứng của các cạnh, góc, đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác giữa hai tam giác bằng nhau hoặc hai tam giác đồng dạng.

Quan hệ vị trí của hình vẽ, như song song, cắt nhau, vuông góc, kề bên, cùng cắt, v.v...

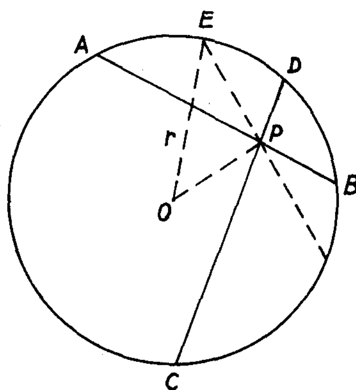
Quan hệ đối xứng, như trục đối xứng, tâm đối xứng trong hình học, các chữ số luân phiên đối xứng trong đại số.

Còn có quan hệ hàm số ; quan hệ suy ra ; quan hệ bằng giá trị ; quan hệ ngược...

Đối với nhiều khái niệm và định lí, qui tắc, nếu chú ý phân tích, so sánh và liên hệ thì chúng ta có thể khái quát được nhiều kiến thức mới. Ví dụ sau khi đưa ra số dương, số âm, phép trừ số hữu tỉ có thể thống nhất thành phép cộng ; có khái niệm số nghịch đảo, đặc biệt là đưa vào số mũ âm, phép chia cũng thống nhất thành phép nhân ; sau khi mở rộng khái niệm số mũ, phép nhân và phép khai căn có thể đưa về phép tính lũy thừa ; bằng nhau và đồng dạng có thể thống nhất vào một khái niệm chung...

Ví dụ trong phần nội dung hình tròn ta đã học ba định lí quan trọng : định lí hai dây cung cắt nhau, định lý đường tiếp tuyến và định lý đường cát tuyến. Các kết luận của định lý đều là tích của các đoạn thẳng bằng nhau.

Vì dây cung hoặc cát tuyến đi qua điểm P là tùy ý, do đó mỗi đẳng tích đều ẩn chứa một tính chất : Dù P ở trong hay ngoài đường tròn, cắt tuyến bất kì đi qua nó cắt đường tròn ở hai điểm A, B chỉ cần vị trí điểm P và đường tròn được xác định thì tích PA. PB là hằng số (hình 19 - 1).



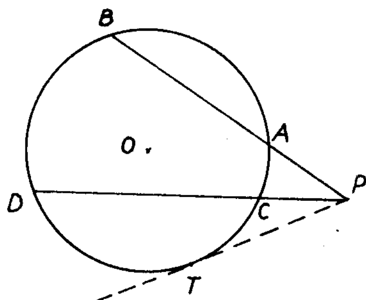
Điểm P trong vòng tròn O
PA.PB = PC .PD
Hình 19–1

Giả thiết hằng số đó là k, bán kính đường tròn là r, khi P ở trong đường tròn, vẽ dây cung $EF \perp OP$, ta có : $k = PA.PB = PE.PF = PE^2 = r^2 - OP^2$, Khi điểm P ở trên đường tròn, rõ ràng $k = 0$

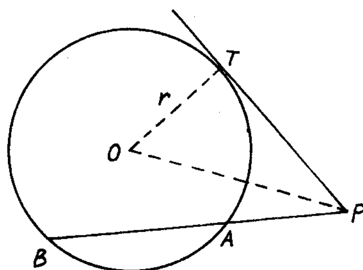
Như vậy ba định lí hai dây cung giao nhau, đường tiếp

tuyến và đường cát tuyến có thể thống nhất thành một định lí : Biết đường tròn, bán kính r, qua điểm P vẽ cát tuyến bất kì cắt đường tròn ở A,B thì luôn có

$$PA.PB = |OP^2 - r^2| \quad \text{(hình 19–2).}$$



a) Điểm P ngoài đường tròn
PA. PB = PC. PD



b) $PT^2 = PA.PB$.

Hình 19 – 2

2. Khái quát đặc điểm của các vấn đề toán học

Có một số học sinh khi giải bài tập có thói quen chỉ biết dùng công thức một cách máy móc. Họ chỉ gặp thuận lợi đối với những bài thầy giáo đã giảng qua hoặc những bài tương tự, còn đối với những bài phải biến đổi khác đi thì không biết làm. Vì sao vậy ? Nguyên nhân có thể rất nhiều, nhưng trong đó có một nguyên nhân chính là chưa hoặc không biết tự khái quát các đặc điểm cơ bản của toán học. Do đó chỉ biết giải loại đề quen thuộc, không biết biến hóa liên thông.

Cho nên muốn nâng cao bản lĩnh giải bài tập, phải biết cách khái quát các đặc điểm toán học. Tức từ các vấn đề cụ thể phải biết gạt bỏ những chi tiết không quan trọng để rút ra một hệ thống vấn đề cốt lõi nhất, tinh giản nhất : đã biết cái gì ? cần tìm cái gì ? Dưới đây cử hai ví dụ.

Ví dụ 1. A nói với B : " Sau khi bạn cho tôi 8 quả mận, số mận của tôi gấp đôi số mận của bạn". Còn B nói với A "Sau khi

bạn cho tôi 8 quả mận, thì số mận của bạn và tôi bằng nhau". Tìm mỗi người có bao nhiêu mận ?

Bỏ hết những chi tiết không quan trọng, đề bài này có thể khái quát như sau : "Có hai số A, B, lấy một phần từ B đưa cho A thì được số A mới gấp đôi B mới ; lấy một phần từ A đưa cho B được A mới bằng B mới. Tìm hai số A, B ban đầu" ?

Ví dụ 2. Sữa trong thùng A gấp đôi sữa trong thùng B. Sau khi mỗi thùng đổ ra 20 lít, thì sữa còn trong thùng A, gấp ba sữa còn trong thùng B. Tìm ban đầu mỗi thùng có bao nhiêu lít ?

Đề này có thể khái quát như sau : biết số A bằng hai lần số B. Sau khi giảm A và B đi 20 thì A = 3B. Tìm A, B ban đầu ?

Trên đây đã khái quát hai đề. Nếu phân tích sâu thêm ta sẽ thấy hai đề có tính chất tương tự. Do đó có thể khái quát là : biết hai số A, B. Tăng hoặc giảm chúng sẽ được một quan hệ số lượng tương ứng. Tìm hai số ban đầu ?

So với lần khái quát thứ nhất, thì đây thực chất là một lần khái quát nữa đối với mình. Khái quát một cách khoa học đặc điểm của vấn đề làm cho ta đưa nhiều vấn đề bề ngoài có vẻ khác nhau, nhưng thực chất là giống nhau, tức là thống nhất được các vấn đề, khác hình mà đồng chất. Nó có lợi giúp ta giảm nhẹ gánh nặng về trí nhớ, nâng cao hiệu suất tư duy, từ đó hiểu vấn đề dễ dàng, nâng cao năng lực phân tích và giải quyết vấn đề.

Dưới đây cử ví dụ về toán cấp ba.

Ví dụ 3. Giả thiết a, b là hai số thực, $A = \{ (x.y) \mid x = n, y = na + b, n \text{ là số nguyên} \}$; $B = \{ (x.y) \mid x = m, y = 3m^2 + 15, m \text{ là số nguyên} \}$; $C = \{ (x.y)\ x^2 + y^2 \leq 144 \}$ là tập hợp điểm trong mặt phẳng.

Biện luận xem có tồn tại a và b để được : 1) $A \cap B \neq \phi$; 2) $(a.b) \in C$ đồng thời thành lập ? (Đề thi cấp ba toàn quốc 1985).

Điều kiện đầu bài khá nhiều, đây là vấn đề khá phức tạp. Để tìm hướng tư duy giải, cần phải làm rõ vấn đề toán học đề này

là gì ? Kết hợp ba tập hợp điểm cho trong đề bài, tự nhiên khiến ta nghĩ đến ý nghĩa hình học của chúng như sau.

Tập hợp A là tập điểm khi x lấy số nguyên n trên đường thẳng $y = ax + b$.

Tập hợp B là tập điểm khi x lấy số nguyên m trên đường parabon $y = 3x^2 + 15$.

$A \cap B \neq \phi$, tức tồn tại a, b và số nguyên p khiến cho $ap + b = 3p^2 + 15$ thành lập. Ý nghĩa hình học của nó là điểm P(a, b) nằm trên đường thẳng $px + y - (3p^2 + 15) = 0$.

Còn tập hợp C là hình tròn : $x^2 + y^2 \leq 144$.

Ý nghĩa hình học của $(a, b) \in C$ là : điểm P(a, b) nằm trong hoặc trên đường tròn $x^2 + y^2 = 144$.

Do đó có thể thấy, thực chất vấn đề toán học của đề này như sau : tồn tại hay không số thực a, b để điểm P(a, b) vừa nằm trên đường thẳng l, $px + y - (3p^2 + 15) = 0$ vừa nằm trong hoặc trên đường tròn $x^2 + y^2 = 144$.

Khái quát được đặc điểm hình học của đề này thì cách giải tự nhiên nó đến : muốn cho 1) và 2) đồng thời thành lập thì khi và chỉ khi khoảng cách d từ tâm O của đường tròn (0 , 0) đến đường thẳng l thỏa mãn d = $\leq$ 15. Sau khi chỉnh lí được $(p^2 - 3)^2 \leq 0$. Vì $(p^2 - 3)^2 \geq 0$, nên $p^2 - 3 = 0$, $p = \pm \sqrt{3}$, điều đó mâu thuẫn với p là số nguyên, cho nên không tồn tại số thực a, b, để cho 1) và 2) đồng thời thành lập.

Dùng phương pháp hình học để giải quyết vấn đề đại số, đó là phương pháp thường được sử dụng.

3. Khái quát hướng suy nghĩ và phương pháp giải bài tập.

Sự khái quát đặc điểm đề mục là vô cùng quan trọng, song quan trọng hơn là sự khái quát hướng suy nghĩa và phương pháp giải. Sự thực là khi giải bài tập, thì không chỉ là giải một vấn đề cụ thể mà là giải đề bài trong một loại vấn đề nào đó. Do đó

hướng suy nghĩ và phương pháp giải bài tập cũng nhất định có một ý nghĩa chung nào đó. Nếu ta chú ý từ đó mà khái quát được hướng suy nghĩ và cách giải của vấn đề nào đó là gì thì ta sẽ có thể dùng nó để chỉ đạo giải vấn đề cùng loại và sẽ mở rộng ra. Nhà toán học Đề-các nói rất đúng rằng : "Mỗi vấn đề mà tôi giải quyết đều sẽ trở thành ví dụ mẫu mực dùng để giải quyết vấn đề khác". Do đó, sau khi giải một đề bài nên chú ý khát quát hướng suy nghĩ và cách giải.

Ví dụ : Có một đội học sinh đi dã ngoại huấn luyện, mỗi giờ họ đi 5 km. Sau khi đi được 18 phút, nhà trường có lệnh khẩn cấp, người đi truyền lệnh xuất phát từ trường, đi xe đạp với tốc độ 14 km/h đuổi theo. Hỏi người truyền lệnh phải dùng bao nhiêu thời gian để đuổi kịp ?

Đây là đề bài đuổi kịp nhau. Biết tốc độ A, B và khoảng cách giữa chúng tìm thời gian cần để đuổi kịp (khái quát đặc điểm của vấn đề).

Phân tích 1. Trong vấn đề này, khi người truyền lệnh đuổi kịp đội học sinh thì quãng đường đi được của hai bên bằng nhau.

$S_{\text{người truyền lệnh}}$ = tốc độ đi xe đạp × thời gian đi xe.

$S_{\text{đội học sinh}}$ = tốc độ học sinh × thời gian học sinh đi.

Giả thiết sau thời gian x thì đuổi kịp. Theo đề bài ta có :

$$14x = 5\left(\frac{18}{60} + x\right)$$

Ta khái quát hướng suy nghĩ và phương pháp giải bài toán : Giải vấn đề đuổi kịp, có thể căn cứ quãng đường A, B đi được bằng nhau để lập phương trình. Tốc độ đã biết, có thể thời gian đi của người có tốc độ nhanh là x.

Phân tích 2. Khi người đưa lệnh đuổi kịp đội học sinh, thực chất là anh ta phải đuổi theo quãng đường học sinh đã đi 18 phút. Tức :

Quãng đường người đưa lệnh phải đuổi theo = Quãng đường học sinh đi sớm hơn. Toàn bộ quãng đường người đưa lệnh đi được –

Quãng đường đội học sinh đi được kể từ lúc người truyền lệnh xuất phát = Quãng đường người đưa lệnh phải đuổi theo.

Giả thiết người truyền lệnh dùng x giờ có thể đuổi kịp đội học sinh, theo đầu bài ta có :

$$5 \times \frac{18}{60} = 14x - 5x$$

Khái quát hướng suy nghĩ và cách giải : Giải vấn đề đuổi kịp có thể căn cứ quãng đường đuổi theo để lập phương trình.

Quãng đường đuổi theo = Quãng đường đi trước của bên đi chậm.

Quãng đường đuổi theo = Toàn bộ quãng đường bến đi nhanh – Quãng đường bên đi chậm đi được kể từ lúc bên đi nhanh xuất phát.

Tốc độ đã biết, giả thiết bên đi nhanh đi mất x giờ.

Phân tích 3. Trong bài này, người truyền lệnh xuất phát sau đội học sinh 18 phút, tức thời gian người đuổi theo dùng ít hơn học sinh 18 phút.

$$\text{Thời gian người truyền lệnh đuổi theo} = \frac{S_{\text{Người truyền lệnh đi được}}}{\text{Tốc độ người truyền lệnh}}.$$

$$\text{Thời gian đội học sinh đi} = \frac{S_{\text{người truyền lệnh đi}}}{\text{Tốc độ người học sinh}}.$$

Quãng đường người truyền lệnh đi được S km. Theo đầu bài có :

$$\frac{S}{5} - \frac{S}{14} = \frac{18}{60}$$

Tìm được S, thay vào $\frac{S}{5}$ sẽ được thời gian người truyền lệnh cần dùng để đuổi theo.

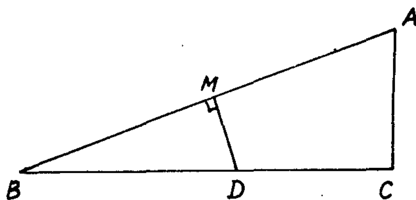
Khái quát hướng suy nghĩ và phương pháp giải : giải vấn đề đuổi kịp, nếu đi nhanh và đi chậm không đồng thời xuất phát, có thể căn cứ thời gian đuổi theo để lập phương trình.

Tốc độ đã biết, có thể giả thiết quãng đường bên nhanh đi được S km (gián tiếp giả thiết ẩn số).

Sau khi đã đưa ra ba cách suy nghĩ và phương pháp giải, ta tiếp tục khái quát bước nữa. Giải vấn đề đuổi kịp phải căn cứ vào quan hệ các đại lượng bằng nhau, quãng đường = tốc độ × thời gian, nếu đã biết tốc độ (cả nhanh và chậm) thì có thể căn cứ vào một trong hai đại lượng quãng đường hoặc thời gian bằng nhau để lập phương trình.

Sau khi hiểu được ý nghĩa của khái quát hướng suy nghĩ và phương pháp giải, ta xét đề dưới đây.

Ví dụ : Hình 19–3, biết trong Δ ABC, $\hat{C} = 90^o$, $\hat{B} = 15^o$, BD = 8cm, MD ⊥ và chia đôi AB. Tìm AC ?



Hình 19 - 3

Để tìm AC, phải tìm tam giác có chứa AC. Vì ΔABC, $\hat{B} = 15^o$, và chỉ biết chiều dài của BD là một phần của BC nên rất khó lợi dụng điều kiện này. Do đó ta phải tìm cách cấu tạo một hình tam giác mới có một cạnh là AC. Do đó ta nghĩ đến nối AD làm xuất hiện R_t ΔADC. Ở đây ta phải từ trong AD, DC, $\widehat{ADC}$ hoặc $\widehat{DAC}$ tìm ra hai cái, sau đó mới tìm AC. Vì chiều dài BD đã biết, $\hat{B}$, mà $\widehat{ADC} = \hat{B} + \widehat{BAD}$. Kết hợp hình với các điều kiện, ta cảm giác được AD và DB bằng nhau. Nếu AD = BD thì $\hat{B} = \widehat{BAD}$, cho nên muốn tìm AC thì mấu chốt là chứng minh ra AD = BD.

Làm sao để chứng minh AD = BD ? Ta sẽ nghĩ ngay đến tam giác cân. Tức chứng minh ΔMDB = Δ MDA. Bạn sẽ nghĩ đến dữ kiện "MD ⊥ và chia đôi AB" và nghĩ đến tính chất của đường thẳng ⊥ và chia đôi cạnh đáy, do đó AD = BD = 8 cm. Do đó $\widehat{BAD} = \hat{B} = 15^o$, $\widehat{ADC} = 30^o$, AC = $\frac{1}{2}$ AD = 4cm.

So sánh tính ưu việt của hai cách chứng minh AD = BD, dễ thấy rằng cách thứ hai đơn giản và nhanh hơn nhiều. Do đó sau khi giải xong phải đặc biệt chú ý khái quát hướng suy nghĩ và

cách giải : Tìm chiều dài cạnh, cấu tạo tam giác. Trong dữ kiện có đoạn thẳng vuông góc và chia đôi cạnh kia, phải lợi dụng tính chất của đoạn thẳng đó : khoảng cách nối từ bất cứ điểm nào trên đoạn thẳng vuông góc và chia đôi cạnh kia đến hai mút cạnh kia đều bằng nhau. Do đó được hai cạnh hoặc hai góc bằng nhau.

Đương nhiên, với đề này học sinh không cần vẽ thêm AD cũng có thể giải được $AC = AB \sin 15^o = 2BM \sin 15^o = 2BD \cos 15^o \times$ $\times \sin 15^o = 2 \times 8 \dfrac{\sqrt{8} + \sqrt{2}}{4} \times \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 4$.

Nếu biết công thức $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos \alpha$ thì càng đơn giản hơn.

$$AC = ... = 2\ BD \cos 15^o \sin 15^o = BD \sin 30^o = 8 \times \frac{1}{2} = 4.$$

Do đó lại có thể khái quát hướng suy nghĩ giải đề này : Biết cạnh, góc của tam giác, tìm cạnh khác, có thể biến thành phương pháp tam giác lượng để giải, tức là dùng lượng giác để giải vấn đề hình học.

Tiến lên bước nữa, ta có thể khái quát hướng suy nghĩ chung để giải đề này : biết cạnh, góc, đoạn thẳng ⊥ và chia đôi cạnh kia, muốn tìm cạnh vừa có thể dùng cách giải hình học, cũng có thể dùng cách giải tam giác lượng. Phải chú ý lợi dụng đầy đủ tính chất đoạn thẳng ⊥ và chia đôi cạnh kia để đơn giản hóa quá trình giải.

Dưới đây lấy một ví dụ có liên quan với đồ thị hàm số.

Giả thiết $a \in R$, $A = \{ x \mid 1 \leq x \leq 4 \}$, $B = \{ x \mid x^2 - 2ax + a + 2 \leq 0 \}$ và $B \neq \phi$, nếu $B \subseteq A$, tìm phạm vi lấy giá trị của a.

Phân tích điều kiện đầu bài ta thấy đề này thực tế là tìm phạm vi số thực a để sao cho hệ số a của bất đẳng thức bậc hai $x^2 - 2ax + a + 2 \leq 0$ trong [1, 4] có nghiệm, tức là tìm phạm vi của a để sao cho đường parabol $y = x^2 - 2ax + a + 2$ giao nhau với trục x trong khoảng đóng [1, 4].

Đồ thị parabol của $y = x^2 - 2ax + a + 2$ vẽ như trên hình 19 –4.

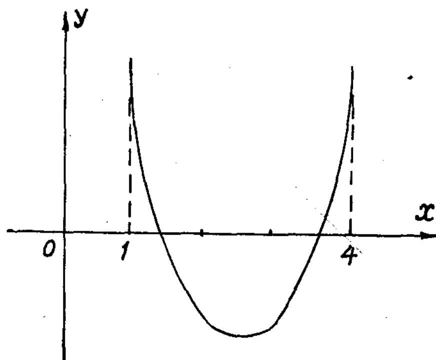
Từ đầu bài ta có : $-1 < a < 4$

$$\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 4(a + 2) \geqslant 0 \\ f(1) = 3 - a \geqslant 0 \\ f(4) = 18 - 7a \geqslant 0 \end{cases}$$

$-1 < a < 4$

$$\begin{cases} a \leqslant -1 \text{ hoặc } a \geqslant 2 \\ a \leqslant 3 \\ a =< \frac{18}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \leqslant a \leqslant \frac{18}{7}$$



Hình 19 –4

Tổng kết cách giải, ta có thể khái quát được phương pháp chung để giải đối với loại vấn đề này như sau : Đối với vấn đề chứa tham số, áp dụng phương pháp kết hợp số và hình vẽ, từ góc độ hình học để xét tổng thể các điều kiện thì sẽ đơn giản.

Tổng kết sự khái quát trên đây tập trung về một điểm thì đó là : trong sự khái quát hướng suy nghĩ và phương pháp, phải làm rõ hướng suy nghĩ để đạt được thành công là gì ? Với vấn đề nào và với điều kiện gì thì cần áp dụng phương pháp toán học nào ?

Trên đây ta đã lần lượt giới thiệu khái quát đối với đặc điểm vấn đề và khái quát hướng suy nghĩ và phương pháp giải bài tập, thực chất thì hai vấn đề này có liên quan với nhau. Do đó, trong học toán phải nắm được hai loại khái quát này.

4. Dùng hình thức khái quát hóa để giải bài tập

Những bạn học toán tốt, khi giải bài tập có thói quen rất tốt là : trước hết phân tích các phần của bài, trên cơ sở đó khái quát nhanh chóng đặc điểm của vấn đề, làm rõ đề bài đó giống với đề bài nào đã làm. Như thế dễ mở ra hướng suy nghĩ, tìm được cách

giải. Đồng thời khi giải, họ biết tạm thời gác lại những chi tiết cụ thể mà từ góc độ chung để suy nghĩ, suy luận.

Ví dụ 1. Một nhà máy gia cụ kế hoạch mỗi ngày sản xuất 48 cái bàn. Thực tế mỗi ngày sản xuất vượt kế hoạch2 cái, do đó ba ngày cuối cùng chỉ cần sản xuất 100 bàn là đủ. Tìm xem nhà máy kế hoạch định sản xuất bao nhiêu bàn ?/

Có một bạn học sinh suy nghĩ như sau : "Đây là vấn đề tìm tổng số công việc tức là vấn đề gồm ba đại lượng liên quan với nhau : hiệu suất (số bàn sản xuất mỗi ngày), tổng công việc (tổng số bàn) và thời gian (số ngày) .

Tổng công việc = hiệu suất công việc × thời gian.

mà hai đại lượng trong số đó có thể biểu thị cho đại lượng thứ ba.

Ta căn cứ vào thời gian để lập phương trình :

Số ngày thực tế sản xuất cần = số ngày kế hoạch dự định - 3.

Giả thiết nhà mày sản xuất x bàn, do đó có phương trình

$$\frac{x - 100}{48 + 2} = \frac{x}{48} - 3.$$

Ta thấy được trong toàn bộ quá trình suy nghĩ, ngay từ đầu đã không đi ngay vào chi tiết cụ thể, ví dụ như dừng lại ở số "2" trong "nhiều hơn 2 bàn" mà là bắt đầu đã khái quát ngay đây là vấn đề tìm tổng số công việc, sau đó mới căn cứ vào tổng số công việc, hiệu suất công việc và thời gian, quan hệ bằng nhau của các đại lượng, kết hợp các điều kiện đã biết và các số liệu liên quan (các tài liệu chi tiết của vấn đề) để lập phương trình. Thử nghĩ xem, nếu căn cứ vào quan hệ bằng nhau giữa các đại lượng công tác, giả thiết kế hoạch sản xuất cần t ngày thì bạn có thể lập được phương trình không ?

Trên cơ sở khái quát đặc điểm đề bài, xuất phát từ góc độ chung để suy nghĩ cách giải, đó chính là dùng hình thức khái quát hóa để giải. Dùng hình thức khái quát hóa để giải, quan hệ logic

rất rõ ràng, không những quá trình giải đơn giản mà còn giúp ta hiểu được bản chất của đề bài.

Dùng hình thức khái quát hóa để giải còn biểu hiện ở chỗ khi vận dụng các quy tắc công thức để giải, đầu tiên diễn toán ra công thức chung, sau đó mới thay các số trị cụ thể vào chứ không phải vừa vào đã thay số để tính toán.

Ví dụ 2. Biết diện tích Δ ABC là $10cm^2$, a = 4cm, tìm chiều cao trên cạnh a ?

Trước hết ta viết ra công thức tính diện tích tam giác : $S = \frac{1}{2} ah$.

Biến đổi thành $h = \frac{2S}{a}$, cuối cùng thay số vào :

$$h = \frac{2 \times 10}{4} = 5cm.$$

Đối với các đề đơn giản, những học sinh khá có lẽ sẽ nhìn thấy lời giải ngay, hầu như không cần dùng công thức chung để giải, nhưng đối với đề tính toán phức tạp, dùng hình thức khái quát hóa để giải là vô cùng quan trọng. Đó là vì đề bài phức tạp, số bước giải nhiều, nếu không dùng hình thức khái quát hóa để giải, mà bước nào cũng thay số vào để tính thì về sau sẽ rất khó nhìn ra mối liên hệ nội tại giữa các đại lượng. Hơn nữa vì mỗi bước đều thay số vào tính, tất nhiên sẽ tăng số lần tính toán, dễ sản sinh ra sai số lớn, hoặc trong tính toán có sai sót cũng khó mà kiểm tra được. Dùng hình thức khái quát hóa để giải không phải là để cho một đề mà là cho một loại vấn đề. Do đó dùng hình thức này để giải có thể sẽ khái quát được hướng suy nghĩ và cách giải được dễ dàng hơn.

Bốn mặt của năng lực khái quát trên đây không phải là tồn tại riêng rẽ mà là liên quan với nhau một cách rất hữu cơ, hoàn chỉnh. Trong quá trình học toán, việc hình thành, tiếp thu, hiểu khái niệm cũng như sự nắm vững và vận dụng chúng đều phải thường xuyên dùng đến phương pháp tư duy khái quát này.

Trình độ khái quát có mức độ khác nhau, giống như bậc thang, khái quát được càng sâu, phạm vi khái quát càng rộng, khái quát được càng nhanh thì trình độ khái quát càng cao.

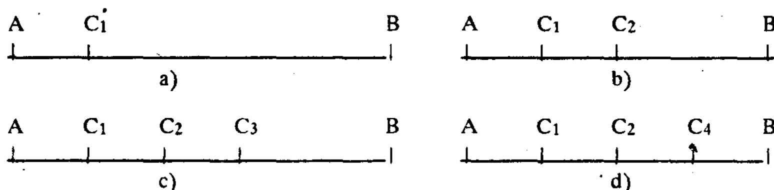
Làm thế nào để nâng cao năng lực khái quát học toán ? Điều cốt yếu nhất là nắm vững phương pháp khái quát. Có ba loại phương pháp khái quát : loại thứ nhất là khái quát từ qũy nạp thực nghiệm ; loại thứ hai là khái quát từ phân tích trừu tượng ; loại thứ ba là khái quát trong thao tác.

Khái quát từ quy nạp thực nghiệm có đặc điểm là từ những tính chất riêng của một số sự vật cụ thể nào đó mà suy ra kết luận chung cho cả loại sự vật đó. Phép qui nạp thực nghiệm luôn luôn bắt đầu từ quan sát, đại thể được chia làm bốn giai đoạn : 1) Giai đoạn thực nghiệm, quan sát ; 2) Giai đoạn qui nạp, phán đoán ; 3) Giai đoạn kiểm chứng và chứng minh sự phán đoán ; 4) Giai đoạn ứng dụng kết luận.

Đó là quá trình : từ đặc điểm riêng → đặc điểm chung → đặc điểm riêng, nó phản ánh những bước thiết yếu của phép khái quát quy nạp.

Ví dụ 3 : Trên hình 19-5, nếu trên AB lần lượt lấy 99 điểm C_1, $C_2 ... C_{99}$.

Vậy tổng số đoạn thẳng bởi các điểm này làm mút (kể cả AB) là bao nhiêu ?



Hình 19-5

Nếu ta trực tiếp đếm thì sẽ rất khó khăn, cho nên để giải quyết vấn đề này, tốt nhất là trước tiên hãy khái quát được mối quan hệ giữa số điểm và tổng số đoạn.

Thứ nhất : quan sát, thực nghiệm.

i) Khi lấy điểm C_1, trong hình 19 - 5 a) có mấy đoạn ? 3 đoạn.

ii) Khi lấy hai điểm C_1, C_2, quan sát hình 19-5b có mấy đoạn ? 6 đoạn. iii) Khi lấy ba điểm C_1, C_2, C_3 quan sát hình 19-5c có mấy đoạn ? 10 đoạn. Thứ hai lập bảng tìm quy luật.

Số điểm lấy trên AB	Tổng số đoạn
1	3 = 1 + 2
2	6 = 1 + 2 + 3
3	10 =1 + 2 + 3 + 4
⋮	⋮

Quan sát bảng : quan hệ tương ứng giữa số điểm và số đoạn thẳng ta đoán được, nếu trên AB lấy n_1 điểm thì tổng số đoạn sẽ là :

$$[1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1)]$$

Thứ ba : chứng minh sự hợp lí của suy đoán ở trên. Khi n = 4, kể cả A, B tất cả có 6 điểm như hình 19 - 5d đã vẽ.

Căn cứ thứ tự từng đoạn riêng sau đó lại kết hợp chúng với nhau thì khi trên AB lấy 4 điểm, có tất cả 15 đoạn, đúng với suy đoán : S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Qua đó thấy rõ sự phán đoán đúng.

Tất nhiên, đáng lẽ ta còn phải chứng minh cho được tính chính xác của chúng, nhưng đó là nội dung của toán cấp ba, ở đây tạm bỏ qua. Như vậy ra đã khái quát được mối quan hệ giữa số điểm và tổng số đoạn S_n trên AB.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \qquad (1)$$

Thứ tư, ứng dụng sự phán đoán qui nạp ở trên. Thay 99 điểm của đề vào công thức (1) được :

$$S_{99} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050 \text{ đoạn thẳng.}$$

Nếu học sinh đã học tổ hợp sắp xếp thì không cần phán đoán qui nạp cũng có thể trực tiếp được $S_{99} = C^2_{101} = 5050$ đoạn.

Dưới đây cử một ví dụ trong số liệt. Trong số liệt $\{a_n\}$, công thức tìm số hạng tổng quát là vấn đề quan trọng. Hai điều kiện để tìm công thức số hạng tổng quát dưới đây đều cần cho sự khái quát của phương pháp qui nạp thực nghiệm.

Trường hợp 1. Biết vài số hạng đầu của dãy số liệt, tìm số hạng tổng quát.

Ví dụ 4 : Cho số liệt $\frac{1}{2 \times 3}, -\frac{4}{3 \times 5}, \frac{9}{4 \times 5}, -\frac{16}{5 \times 6}\cdots$

So sánh 4 số hạng đầu của số liệt, từ các dấu cộng, trừ, quan hệ giữa tử số và số số hạng, giữa mẫu số và số số hạng, ta có thể khái quát công thức số hạng tổng quát của số liệt này là :

$$a^n = (-1)^{n-1}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \; (n \in N).$$

Ví dụ 5. Biết số liệt : 1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1, 1 + 2 +...+ n + ...+ 2 + 1,...

Viết số hạng tổng quát của nó.

Vì $a_1 = 1, a_2 = 1+2+1 = 4 = 2^2, a_3 = 1+2+3+2+1 = 9 = 3^3$

nênta đoán $a_n = 1 + 2 + \ldots + n + \ldots + 2 + 1 = n^2$.

Sau đó ta dùng phép qui nạp toán học để chứng minh tính chính xác của nó.

Trường hợp 2. Biết được dạng lùi của số liệt, tìm số hạng tổng quát.

Ví dụ 6. Giả thiết số liệt $\{a_n\}$ thỏa mãn quan hệ sau : $a_1 = 2P$,

$$a_n = 2P - \frac{P^2}{a_{n-1}} \; (P \neq 0). \text{ Tìm } a_n ?$$

Theo đề bài ta có :

$$a_2 = 2P - \frac{P^2}{a_1} = 2P - \frac{P^2}{2P} = \frac{3}{2} P$$

$$a_3 = 2P - \frac{P^2}{a_2} = 2P - \frac{P^2}{3P/2} = \frac{4}{3} P.$$

$$a_4 = 2P - \frac{P^2}{a_3} = 2P - \frac{P^2}{4P/3} = \frac{5}{4} P.$$

Do đó, ta đoán $a_n = \frac{n+1}{n} P$. Sau đó dùng phép qui nạp toán học để chứng minh.

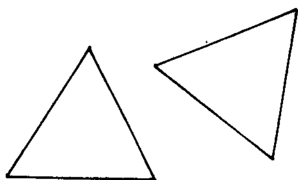
Khái quát từ phân tích trừu tượng. Đặc điểm phương pháp này là từ sự phân tích một sự vật cụ thể, riêng lẻ suy ra tính chất chung của loại sự vật đó. Khái quát từ trừu tượng cũng là phương pháp vô cùng quan trọng. Nó bắt đầu từ phân tích, từ ngoài vào trong, từ thô đến tinh, chọn lấy cái cốt lõi. Ở phần "khái quát đặc điểm của các vấn đề toán học" trên kia, đã khái quát đặc điểm của các ví dụ "chia mận" và "trọng lượng sữa", đó đều là ứng dụng của phép phân tích trừu tượng.

Khái quát từ thao tác. Đặc điểm của nó là qua tự tay mình đo, vẽ, tính toán, so sánh... để phân tích vấn đề, phát hiện tính chất của một loại sự vật nào đó.

Ví dụ : giải đề sau : Có hai tam giác đều bằng nhau đặt trong cùng một mặt phẳng, giữa các cạnh với nhau có thể có bao nhiêu giao điểm ?

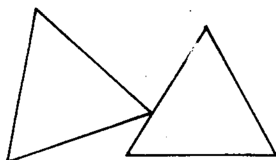
Muốn giải quyết vấn đề này, chỉ dựa vào tưởng tượng rất khó khăn. Vẽ hình có thể sẽ đỡ hơn nhưng cũng khó thấy hết cho mọi trường hợp. Lúc đó ta nên dùng phương pháp thao tác để khái quát.

Cắt hai tam giác đều bằng nhau, đặt vào cùng mặt phẳng (hình 19 - 6).



Không có giao điểm

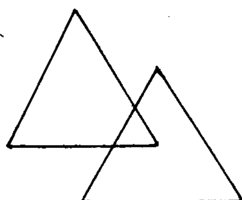
a)



Có 1 giao điểm

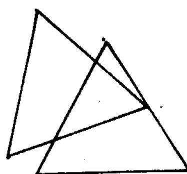
b)

Hình 19 – 6



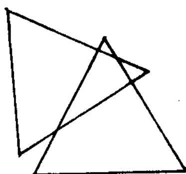
Có 2 giao điểm

c)



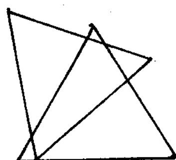
Có 3 giao điểm

d)



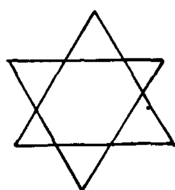
Có 4 giao điểm

e)



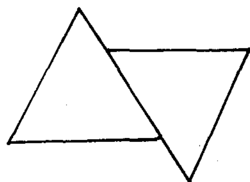
Có 5 giao điểm

f)



Có 6 giao điểm

g)



Có vô số giao điểm

h)

Hình 19 – 6

Qua phân tích thao tác, khái quát được kết luận : Bất kì hai tam giác đều nào, giữa các cạnh của chúng có thể không có giao điểm, 1 giao điểm, 2 giao điểm, 3, 4, 5, 6 và vô cùng giao điểm tức có 8 trường hợp.

Trong khái quát thao tác, để khái quát được hoàn chỉnh, phải đặc biệt chú ý đến các trường hợp bất thường và các trường hợp vô cùng đặc biệt. Ví dụ trong thao tác trên, trường hợp 5 giao điểm không dễ phát hiện ; hai trường hợp không có giao điểm và vô số giao điểm là vô cùng đặc biệt, rất nhiều học sinh không nghĩ đến.

Ba phương pháp khái quát trên đây, trong thực tế vận dụng có lúc dùng riêng lẻ, có lúc dùng kết hợp. Khi nào dùng riêng, khi nào dùng kết hợp điều đó phải xuất phát từ đặc điểm của vấn đề và trình độ khái quát của mình. Mong rằng qua thực tiễn, mọi người sẽ tổng kết được những kinh nghiệm hay.

Bạn đọc tự tổng kết xem trong quá trình học tập, phần kiến thức nào đã dùng đến phương pháp khái quát thao tác.

19 - LÀM THẾ NÀO ĐỂ NÂNG CAO NĂNG LỰC TÍNH TOÁN

Năng lực tính toán là chỉ bản lĩnh tính toán. Nó được biểu hiện ở ba mặt : tính chính xác, nhanh và ngắn gọn, tức là tính đúng, nhanh và phương pháp tốt. Học toán gắn liền với tính toán, do đó nâng cao năng lực tính toán là một trong những yêu cầu cơ bản học toán tốt.

Tính toán ở phần toán trung học có tính số, tính biểu thức, giải (hệ) phương trình, giải (hệ) bất đẳng thức, tính toán hàm số, giới hạn, véctơ, hằng đẳng thức v.v.. Những phép tính này được triển khai từ đầu cấp hai đến hết cấp ba. Dưới đây kết hợp với những phép tính chủ yếu để bàn về làm thế nào nâng cao năng lực tính toán.

1. Phải nắm chắc các khái niệm cơ bản và kiến thức cơ sở

Các khái niệm, định nghĩa, định lí, qui tắc, công thức v.v.. trong toán là chỗ dựa để giải bài tập. Do đó nâng cao năng lực tính toán, đầu tiên phải nắm chắc các khái niệm cơ bản và kiến thức cơ sở. Muốn thế phải coi trọng học các khái niệm. Muốn học được sâu, phải hiểu cho rõ những điều cốt lõi của khái niệm, hiểu được cách vận dụng chúng để giải bài tập và đề phòng những sai lầm thường gặp. Ví dụ khái niệm trị tuyệt đối phải thông qua các câu chữ trong định nghĩa để hiểu được cốt lõi của nó : trị tuyệt đối của số thực x phải dựa vào quan hệ của nó với số không để biện luận ; trị tuyệt đối của số thực x phải dựa vào quan hệ của nó với số không để biện luận ; trị tuyệt đối của số thực x là $|x| \geqslant 0$. Khi gặp phải vấn đề trị tuyệt đối có dấu, hướng suy nghĩ cơ bản là dựa vào ý nghĩa trị tuyệt đối để bỏ dấu, phương pháp cụ thể là phương pháp điểm không. Khi tìm trị tuyết đối phải để

phòng vận dụng khái niệm một cách hình thức đưa đến sai lầm có tính lí thuyết. Ví dụ đơn giản $|x - 3|$ thì không phải là chia ra ba trường hợp $x > 3$, $x = 3$ và $x < 3$ để biện luận mà phải căn cứ theo $x > 0$, $x = 0$ và $x < 0$ để giải. Đối với những vấn đề trị tuyệt đối chứa hai hoặc từ hai dấu trở lên, vẫn dùng phương pháp điểm không để giải quyết dấu của trị tuyệt đối. Nếu các điểm cơ bản trên đây đã nắm vững và vận dụng thành thạo thì đối với vấn đề tính trị tuyệt đối sẽ rất yên tâm.

Ví dụ. Nếu $x \leqslant \frac{7}{11}$, tìm trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|x - 1| - |x + 3|$. Đầu tiên phải đơn giản hóa $|x - 1| - |x + 3|$. Theo điều kiện $x \leqslant \frac{7}{11}$ có thể biết $x - 1 < 0$, còn $x + 3$ có phải nhất định là dương không ? Có học sinh sẽ không suy nghĩ nữa mà cho rằng $x + 3 > 0$. Thực tế là khi $x \leqslant \frac{7}{11}$, $x + 3$ cũng có thể bằng hoặc nhỏ hơn không. Vì khi $x = -3 < \frac{7}{11}$ thì $x + 3 = 0$, khi $x < -3 < \frac{7}{11}$, $x + 3 < 0$. Cho nên muốn đơn giản biểu thức trên phải dựa theo hai trường hợp $-3 < x \leqslant \frac{7}{11}$ và $x \leqslant -3$ để biện luận.

Khi $-3 < x \leqslant \frac{7}{11}$, $|x - 1| - |x + 3| = 1 - x - x - 3 = -2x - 2$

Khi $x \leqslant -3$, $|x - 1| - |x + 3| = 1 - x + x + 3 = 4$.

Cho nên khi $x = \frac{7}{11}$, biểu thức có trị nhỏ nhất :

$$-2 \times \frac{7}{11} - 2 = -3\frac{3}{11}.$$

Khi $x \leqslant -3$, biểu thức có trị số lớn nhất là 4.

Ví dụ khác. Hiểu về định lí biệt thức giải nghiệm phương trình bậc hai có hệ số thực, phải đặc biệt chú ý đến điều kiện tiền đề

"hệ số số hạng bậc hai khác không". Nếu bỏ qua điều kiện tất yếu đó thì sẽ sai lầm ngay. Ví dụ : giải đề sau : Với giá trị nào của k, phương trình $k^2x^2 + 4kx + 1 = 0$ có nghiệm thực ?

Có người giải như sau : $\Delta = (4k)^2 - 4k^2 \times 1 = 12k^2$.

Vì $\Delta \geqslant 0$ nên được $k \geqslant 0$.

Thử hỏi, đáp số đó đúng không ? Dễ thấy rằng khi $k = 0$ thì phương trình sẽ trở thành $0.x + 1 = 0$, đó là điều vô lí. Phương trình ban đầu không có nghiệm, vậy nguyên nhân đưa đến kết luận sai là gì ? Hiển nhiên sai ở chỗ ứng dụng biệt thức Δ sai. Vì phương trình ban đầu là phương trình chứa hệ số k, hơn nữa chỉ khi $k \neq 0$, nó mới là phương trình bậc hai và mới có điều kiện dùng biệt thức để phán đoán nghiệm.

Cách giải đúng là : khi $k \neq 0$, $\Delta = (4k^2) - 4k^2 \times 1 = 12k^2$.

Vì $\Delta > 0$, được $k \neq 0$; khi $k = 0$ phương trình ban đầu trở thành $1 = 0$ không có nghiệm. Nên khi và chỉ khi $k \neq 0$ phương trình đã cho mới có nghiệm thực.

2. Phải chú ý rèn luyện kĩ năng cơ bản

Kĩ năng cơ bản là phương thức hoạt động thao tác tư duy đơn giản nhất, phải vô cùng thành thạo, cố đạt đến trình độ tự động hóa. Làm được như thế, khi gặp phải vấn đề phức tạp, ta không cần thiết phải lo lắng sẽ tính toán ra sao đây mà có điều kiện tập trung tinh lực cho hướng giải quyết vấn đề.

Chú trọng rèn luyện kĩ năng cơ bản trên hai mặt sau :

1) Nâng cao kĩ năng tính nhẩm và tính nhanh. Tính nhẩm và tính nhanh là những kĩ năng cơ bản của tính toán. Ngày nay khi mà máy tính được dùng rộng rãi, việc tính toán những số liệu đơn giản cũng phải dựa vào tính nhẩm và tính nhanh. Muốn thế phải kết hợp đặc điểm mà tính, vận dụng linh hoạt các kiểu qui tắc tính, tăng cường luyện tập tính nhẩm và tính nhanh. Ví dụ những phép cộng, trừ không quá ba con số như 327 + 19 trực tiếp nhẩm được 346, không cần viết ra giấy nữa. Nhẩm những phép nhân một chữ số với nhiều chữ số.

Nắm vững cách đặt thừa số để giải các phép tính đơn giản về căn thức. Ví dụ đơn giản phép tính

$\dfrac{-4 \pm \sqrt{36 + 4 \times 62 \times 18}}{2}$, không nên tính các số trong căn thành $36 + 4 \times 62 \times 18$ mà phải đặt thành thừa số chung $36\,(1 + 2 \times 62)$.

Tức $\dfrac{-4 \pm \sqrt{36 + 4 \times 62 \times 18}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36(1 + 2 \times 62)}}{2}$

$$= \frac{-4 \pm 6\sqrt{125}}{2} = \frac{-4 \pm 30\sqrt{5}}{2} = -2 \pm 15\sqrt{5}.$$

Phải thành thạo phép bình phương để tìm căn bậc hai.

Biết phương pháp biến tử số và mẫu số thành những dạng hợp lí để biến đổi đưa về hằng đẳng thức. Ví dụ :

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})}$$

$$= \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Phải biến đổi thành thạo các hằng đẳng thức

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$

2) Thuộc lòng những số thường dùng. Một số chữ số thường dùng phải nhớ, có thể sử dụng cách nhớ máy móc kết hợp với nhớ theo qui luật để tốc kí chúng. Những số hay dùng có :

Các số bình phương từ 1 – 30 ; căn cứ các số tự nhiên 2, 3, 5, 6 ; trị số của sin, cos, tg, cotg của 15^o, 30^o, 45^o, 75^o ; log của lg 2, lg3, lg5 ; chuyển đổi giữa độ và radian của các góc đặc biệt, như $360^o = 2\pi$, $180^o = \pi$, $90^o = \frac{\pi}{2}$, $60^o = \frac{\pi}{3}$, $45^o = \frac{\pi}{4}$, $30^o = \frac{\pi}{6}$,

$22^{o}30' = \frac{\pi}{8}$, $15^{o} = \frac{\pi}{12}$; quan hệ giữa ba cạnh của tam giác vuông cân, tam giác vuông có góc nhọn 30^{o}, 60^{o}. Nhóm số Pitago thường dùng (3,4,5) (5,12,13), (6,8,10)...

Dãy số và số tổ hợp P_3^2, P_3^3, P_4^2, P_4^3, P_5^2, P_5^3, P_5^4, C_4^2, C_4^3, C_5^2, C_5^3, C_6^2, C_6^3;

Giai thừa 3 !, 4 !, 5 !

3. Tăng cường ý thức tính nhanh và năng lực tính nhanh

Tính nhanh là chỉ tiêu quan trọng để đo năng lực tính toán giỏi hay kém. Thực hiện quá trình tính nhanh có hiệu quả là chọn được phương pháp tính hợp lí. Làm như thế vừa tránh được rườm rà, vừa đỡ xảy ra sai sót, rất đáng quan tâm. Muốn làm được điều đó, trước hết phải tăng cường ý thức tính nhanh, tức là hễ gặp lúc phải tính là nghĩ ngay đến có tính nhanh được không ? Chứ không phải là không chú ý đến đặc điểm phép tính, cứ thế tính theo thói quen như thường lệ. Trên cơ sở đó mà không ngừng mầy mò, tích lũy kinh nghiệm. Tự bắt mình rèn luyện tính nhanh một cách có ý thức, thời gian lâu sẽ có hiệu quả.

Ví dụ 1. Tính

$$(-66)\left[1\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{11}\right)\right] + (-124) \times 38 - (-62) \times (-124).$$

Chú ý đặc điểm của phép tính, dùng thuận và nghịch luật phân phối của phép nhân có thể biến đổi thành :

Phép tính ban đầu

$$= (-66) \times 1\frac{1}{2} - (-66)\left(-\frac{1}{3}\right) + (-66)\left(-\frac{5}{11}\right) + (-124)(38+62)$$

$$= -99 - 22 + 30 - 12400 = -12491$$

Ví dụ 2. Tính $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}$.

Chú ý đến mẫu số của hai số hạng đầu là dạng hiệu và tổng để lấy mẫu số chung, ta có :

Phép tính ban đầu =

$$\frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8}$$

Ví dụ 3. Tìm trị số của (1 = tg 1°)(1 + tg 2°)... (1 + tg 44°).

Quan sát các thừa số chúng đều có dạng (1 + tg θ_k) trong đó θ_k = k° (k ∈ N, 1 ≤ k ≤ 44). Liên tưởng đến tg α + tg β = =tg(α + β)(1 − tgαtgβ), ta đem (1+ tg1°) và (1 + tg 44°), (1 + tg2°) và (1 + tg43°),... (1 + tg22°) và (1 + tg23°) kết hợp với nhau sẽ được tg45°.

Biểu thức ban đầu = [(1 + tg1°)(1 + tg44°)][(1 + tg2°)(1 + + tg 43°)] ... [(1 + tg22°)(1 + tg23°)] = (1 + tg 1° + tg 44° + tg1°× ×tg44°)(1 + tg2° + tg43° + tg2°tg43°) ...(1 + tg22° + tg23° + + tg22°tg23°) =

= (1 + tg45°)(1 + tg45°)...(1 + tg45°).

= 2^{22}

Ví dụ 4. Tính $123456^2 - 123455 \times 123457$.

Chú ý đến $123456 = \frac{123455 + 123457}{2}$ ta có thể biến đổi

123455 = 123456 − 1, 123457 = 123456 + 1. Do đó :

Phép tính ban đầu $= 123456^2 - (123456 - 1)(123456 + 1)$

$= 123456^2 - (123456^2 - 1) = 1$.

Ví dụ 5. Biết ba cạnh của tam giác lần lượt là 24, 32, 40. Tìm góc lớn nhất của tam giác.

Đề này nếu không thấy ước số chung của ba cạnh là 8 mà cứ dùng trực tiếp định lí cos của góc thì sẽ tính rất lâu.

Chú ý đến đặc điểm trên sẽ giảm lượng tính toán rất nhiều.

Vì 24 : 32 : 40 = 3 : 4 : 5 mà $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$ nên góc lớn nhất của tam giác là 90^o.

Ví dụ 6. Biết $a_1, a_2, \ldots, a_{1992}$ đều là số dương. Giả thiết

$$M = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{1991})(a_2 + a_3 + \ldots + a_{1992})$$

$$N = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{1992})(a_2 + a_3 + \ldots + a_{1991})$$

So sánh M và N số nào là lớn hơn ?

Quan sát hai số M và N dễ thấy rằng trong các thừa số đều có $a_2 + a_3 + \ldots + a_{1991}$. Liên tưởng đến phương pháp đặt số phụ ta có :

Giả thiết $b = a_2 + a_3 + \ldots + a_{1991} > 0$ thì

$$M - N = (a_1 + b)(b + a_{1992}) - (a_1 + b + a_{1992})b$$

$$= a_1 a_{1992}.$$

Vì $a_1 > 0$, $a_{1992} > 0$ nên $M - N > 0$ Do đó $M > N$.

Ví dụ 7. Với giá trị nào của k thì đường thẳng $4x + 3y - 2k = 0$ và đường tròn $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$: 1) tiếp tuyến, 2) không cắt nhau, 3) cát tuyến ?

Giải. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ tức

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$, đó là đường tròn có tâm là $(+3, -2)$ và bán kính $r = 4$.

1) Giả thiết đường thẳng là tiếp tuyến thì khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng là $d = \dfrac{|4 \times 3 + 3(-2) - 2k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$.

nên $|6 - 2k| = 20$, giải được $k = -7$ hoặc $k = 13$.

2) Giả thiết đường thẳng không cắt đường tròn thì

$|6 - 2k| > 20$, giải được $k < -7$ hoặc $k > 13$.

3) Giả thiết đường thẳng a là cát tuyến thì

$|6 - 2k| < 20$, giải được $-7 < k < 13$.

Đề này nếu dùng cách giải đại số thông thường, chuyển nó thành phương trình bậc hai, xét biệt thức để tìm nghiệm thì lượng tính toán sẽ tăng lên.

4. Một đề cố tìm nhiều cách giải

Trong luyện tập hàng ngày cố gắng một đề tìm nhiều cách giải. Từ những góc độ khác nhau, từ nhiều phía để mầy mò cách giải, như thế có thể làm cho tính toán linh hoạt, đa dạng, từ đó có thể chọn ra cách giải nào ngắn gọn nhất, hợp lí nhất. Không ngừng tích lũy kinh nghiệm sẽ từ nhận thức cảm tính nâng lên lý tính, dần dần sẽ cảm giác trước cách giải nào ngắn gọn, hợp lí nhất.

Ví dụ : Khoảng cách từ cuộc điểm P trên đường elíp $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$ đến tiêu điểm bên trái là 15. Tìm khoảng cách từ P đến hai đường chuẩn.

Cách giải 1. Giả thiết tọa độ của điểm P là x, y. Dễ biết được $a = 10$, $b = 6$, nên $c = 8$.

Trung tâm của elip là (2,1) tiêu điểm trái F_1 là (-6, 1).

Do đó $\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1 \\ \sqrt{(x+6)^2 + (y-1)^2} = 15 \end{cases}$

Triệt tiêu y, giải được $x_1 = \frac{33}{4}$, $x_2 = \frac{-117}{4}$ (bỏ nghiệm này).

Lại vì $\frac{a^2}{c} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$. Phương trình hai đường chuẩn trái, phải là $x = -\frac{21}{2}$, $x = \frac{29}{2}$. Cho nên khoảng cách từ P đến hai đường chuẩn trái, phải là $\frac{75}{4}$ và $\frac{25}{4}$.

Cách giải 2. Vì 2a = 20, khoảng cách từ P đến tiêu điểm trái là 15, nên khoảng cách từ P đến tiêu điểm phải là 5.

Giả thiết tọa độ của P là x, y. Vì tọa độ của tiêu điểm trái và tiêu điểm phải là (–6,1) và (10,1).

Ta có $\begin{cases} \sqrt{(x+6)^2 + (y-1)^2} = 15 \\ \sqrt{(x-10)^2 + (y-1)^2} = 5 \end{cases}$

Giải được $x = \frac{33}{4}$. Phần tiếp theo giải giống cách giải 1.

Cách giải 3. Từ a = 10, b = 6, được c = 8. Cho nên độ chênh cách tiêu điểm $e = \frac{4}{5}$.

Từ định nghĩa đường cong chóp nón có :

$$\frac{\text{Khoảng cách từ P đến tiêu điểm trái}}{\text{Khoảng cách từ P đến tiêu điểm phải}} = e$$

Khoảng cách từ P đến đường chuẩn trái là $\frac{75}{4}$. Dễ dàng giải được khoảng cách từ P đến đường chuẩn phải là $\frac{25}{4}$.

Ba phương pháp tìm khoảng cách từ P đến đường chuẩn thì cách giải thứ ba đơn giản nhất, nhưng học sinh không dễ tìm được phương pháp này. Để nâng cao tính dự cảm đối với vấn đề tìm khoảng cách có liên quan với đường chuẩn, ta phải tổng kết kinh nghiệm rất công phu.

5. Bồi dưỡng thói quen tính toán chính xác

Để nâng cao năng lực tính toán, bồi dưỡng thói quen tính toán chính xác là vô cùng quan trọng. Học sinh nên bồi dưỡng cho mình thói quen tốt về các mặt sau.

1. Đọc đề cẩn thận. Gặp đề toán, trước hết nên đọc cẩn thận một lượt. Lúc thi càng phải đọc đề cẩn thận, không được xem là

đương nhiên, không được vội vàng. Phải phân tích kĩ điều kiện đã cho, cần tìm cái gì ? Trên cơ sở đó quan sát đặc điểm của các biểu thức, liên tưởng đến những kinh nghiệm đã giải bài tập, những công thức, qui tắc, cách tính có liên quan từ tổng thể nhanh chóng hình thành ý đồ giải. Khi đọc đề còn phải chú ý đến các điều kiện ràng buộc hoặc các điều kiện hạn chế ngầm trong đề để bảo đảm tính toán được chính xác.

2) Tính toán tỉ mỉ. Làm đề tính toán nhất thiết phải cẩn thận, tập trung chú ý cao độ, phép tính càng đơn giản càng phải cẩn thận. Gặp phép tính phức tạp phải bình tĩnh không được nôn nóng, từng bước một tính toán cẩn thận, tính đến đâu bảo đảm chính xác đến đó. Ở cấp ba giải phương trình hoặc bất đẳng thức chứa tham số và trong phương trình các đường cong hình học chứa tham số vừa trừu tượng vừa có độ khó cao, tầng lớp nhiều, một bước tính sai (như sai dấu, sai hệ số) sẽ dẫn đến tất cả đều sai. Do đó phải hết sức cẩn thận, tự tin, kiên trì tính toán.

3) Kiên trì kiểm tra. Làm xong bài, phải kiên nhẫn kiểm tra. Từ xem lại đề, bước giải đầu tiên, quá trình giải cho đến tận đáp số đều không được cẩu thả tí nào, từng chỗ từng dòng kiên nhẫn kiểm tra lại.

4) Chữ viết ngay ngắn. Giải bài tập nhất định phải viết chữ ngay ngắn, trình bày thích hợp theo các loại đề. Làm như thế không những đỡ sai mà còn giúp cho tư duy mạch lạc.

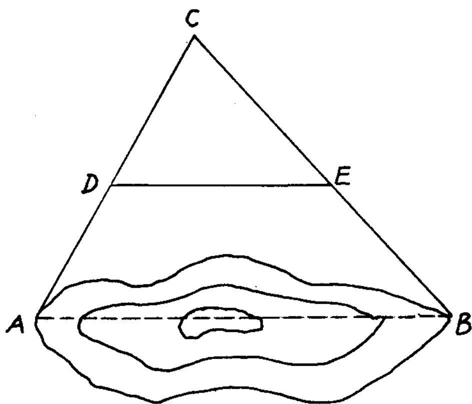
20 - BỒI DƯỠNG PHẨM CHẤT TƯ DUY TỐT

Sáng dậy mở cửa ra, nhìn thấy bên ngoài khắp nơi đầy tuyết, ta biết được tối hôm qua rơi tuyết. Tối rơi tuyết ta không nhìn thấy, cũng không cảm giác được có rơi tuyết, nhưng thông qua

đại não dùng phương pháp suy đoán khiến ta hình như trở về tối qua mắt thấy tuyết rơi. Đó là đại não gián tiếp phản ánh hiện thực, là kết quả của tư duy tác dụng. Tư duy là cái gì ? Tư duy là đại não mượn ngôn ngữ lấy một số kiến thức nhất định làm cơ sở để phản ánh gián tiếp và khái quát hiện thực khách quan. Tư duy có thể giúp ta phát hiện qui luật và dự cảm được tương lai.

Trong hoạt động học tập phải gắn chặt với tư duy. Trên lớp, thông qua hoạt động tư duy như phân tích, so sánh, trừu tượng, khái quát, v.v... Đối với các đại lượng trái ngược nhau (như dương 3°C và âm 3°C, tiến lên 100m và lùi lại 100m v.v...) mà vứt bỏ những đặc trưng không phải là bản chất, tìm ra những đặc trưng bản chất của nó, đó là tổng hiệu quả của cả h ai có thể triệt tiêu lẫn nhau hoặc triệt tiêu một bộ phận. Để xử lý một cách hệ thống những đại lượng trái ngược nhau như thế, đặc biệt là tiện cho so sánh và tính toán, người ta đưa vào những số mới : số dương và số âm. Sau khi ta đã hình thành được khái niệm số dương và số âm, nếu gặp những vấn đề có các đại lượng ngược nhau thì có thể dùng khái niệm mới để giải quyết chúng. Ở đó sẽ tiến hành hoạt động tư duy từ chung sang đặc thù riêng.

Trên hình 21-1, giả thiết AB là cái ao rộng, rất khó đo trực tiếp. Do đó ta tìm điểm C làm điểm đo. Lấy D là điểm giữa của CA, E là điểm giữa CB. Như vậy chỉ cần biết DE, nhờ định lí đường nối điểm giữa hai cạnh bên song song với đáy của tam giác ta có : $DE = \frac{1}{2} AB$. Qua hoạt động của tư duy, rất dễ tính được AB.



Hình 21-1

Các tính toán trong toán cũng là hoạt động tư duy logic. Ví dụ tính (-2) - (+7)

= (-2) + (-7) (qui tắc phép trừ của số hữu tỉ) suy luận bước 1

= -(2 + 7) (qui tắc phép cộng số hữu tỉ) suy luận bước 2

= -9 (qui tắc phép cộng số tự nhiên) suy luận bước 3.

Ở đây gồm ba bước suy luận.

Có thể thấy rõ, qua hoạt động tư duy, nhờ vào kiến thức và kinh nghiệm đã có, ta có thể biết được các sự vật chưa hề có cảm giác trực tiếp hoặc không thể cảm giác trực tiếp được, phát hiện được quy luật phát triển của sự vật và dự kiến được quá trình và kết quả của sự phát triển đó. Thông qua hoạt động tư duy giúp ta trong học tập có thể kế thừa được tri thức của nhân loại, và có thể vận dụng tri thức đó để giải quyết các vấn đề trong học tập. Xa rời hoạt động tư duy sẽ không có phát hiện khoa học, cũng tức là không học tập được.

1. Hình thành phẩm chất tư duy tốt

Phẩm chất tư duy của một người là chỉ đặc điểm thường biểu hiện ra khi người đó suy nghĩ. Ví dụ, có học sinh khi làm bài tập thích suy nghĩ độc lập, gặp bài khó cũng không dễ dàng hỏi người khác, khi trả lời câu hỏi hoặc làm bài tập chú ý mạch lạc, chặt chẽ, chính xác, tính lôgic cao ; có học sinh gặp một đề thường giải nhiều cách, cách này không được, có khả năng tìm nhanh ra cách khác, v.v...

Phẩm chất tư duy toán là tiêu chí năng lực tư duy toán mạnh hay yếu. Dưới đây chú trọng bàn về sự hình thành phẩm chất tư duy về các mặt tư duy độc lập, tư duy sâu sắc và sử dụng linh hoạt, v.v...

1) Tính tự duy độc lập. Nó biểu hiện ở sự thành thạo đề xuất vấn đề, giải quyết vấn đề một cách độc lập, tính tư duy độc lập đó xuyên suốt cả quá trình học toán. Khi học kiến thức mới, phải kinh qua sự suy nghĩ đại não của mình, thật hiểu sau đó mới chịu tiếp thu. Ai suy nghĩ được sâu, người đó sẽ nắm được kiến thức

tốt, trong vận dụng kiến thức, chỉ có qua độc lập suy nghĩ, hiểu rõ vấn đề cần giải quyết mới có thể giải quyết được chính xác.

Cũng chỉ có qua độc lập suy nghĩ mới có phát hiện mới, sáng tạo ra cái mới.

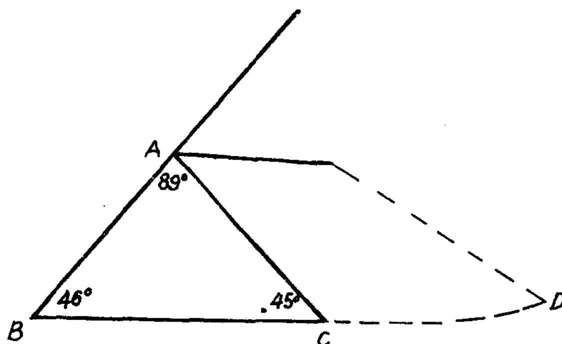
Nêu ra vấn đề, điều đó đối với sự phát triển khoa học có tác dụng vô cùng quan trọng. Anhstanh nói : "Nêu ra vấn đề thường quan trọng hơn giải quyết vấn đề". Trong dòng sông phát triển toán học, các nhà toán học đã nêu ra nhiều vấn đề có ảnh hưởng sâu xa đến sự phát triển của nó. Ví dụ có người đã nêu ra trong hình học Ơle "song song có thể chứng minh được không ? ". Về sau qua nghiên cứu vấn đề đó đã sản sinh ra hình học phi Ơle và gợi cho nhiều nhà toán học đi sâu vào nghiên cứu phương pháp định đề hóa.

Trong học tập, muốn học được sâu sắc, phát triển năng lực tư duy thì phải biết độc lập nêu ra vấn đề, gặp cái gì cũng phải hỏi vì sao. Trần Hiến Chương - một học giả đời Minh nói rất đúng : "Sự học quý ở nghi vấn, nghi vấn nhỏ thì tiến được ít, nghi vấn to thì tiến được nhiều. Nghi vấn là dịp tỉnh ngộ, một lần tỉnh ngộ là một lần tiến lên" ! Giáo sư Hoa La Canh thời còn trẻ không sùng bái quyền uy, đã chất vấn đối với luận văn của giáo sư Tô Gia Câu, Ông viết luận văn về "Lí do cách giải phương trình đại số bậc năm của Tô Gia Câu không thực hiện được". Luận văn đó đã mở ra con đường nghiên cứu toán học về sau này của giáo sư Hoa La Canh. Qua đó thấy rõ, độc lập nêu ra vấn đề có ý nghĩa quan trọng biết bao đối với học tập và sự phát triển của tư duy.

Trong học toán chỉ cần quyết tâm động não thì có một số vấn đề sẽ tự nhiên nẩy ra. Nhưng có rất nhiều vấn đề đòi hỏi tự mình đào sâu, nghiên cứu. Ví dụ, học xong một khái niệm, nên suy nghĩ vì sao lại đưa ra khái niệm này, điều kiện then chốt của khái niệm này là gì, nó với những khái niệm khác có gì liên quan. Học xong các định lí, công thức hoặc qui tắc nên nghĩ xem chúng được đưa ra như thế nào, hướng suy nghĩ của chứng minh là gì. Nếu thay đổi một số điều kiện thì kết luận sẽ thay đổi ra sao ? Ngoài ra còn phải nghiên cứu giữa các khái niệm, các định l. có gì liên quan

và có gì khác biệt, nghiên cứu đến khi nào nắm được toàn thể các vấn đề mới thôi.

Đương nhiên mọi vấn đề nêu ra không chắc đều chính xác, điều đó không hề gì, nó có thể giúp ta nâng cao nhận thức từ mặt trái. Từ trong sai lầm rút ra bài học, đó cũng là một cách học tập. Ví dụ một bạn học sinh khi học về đường phân giác ngoài của tam giác câu : Nếu góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC bằng 89^o, $\widehat{B} = 46^o$, $\widehat{C} = 45^o$ thì đường phân giác ngoài AD của $\widehat{BAC}$ hầu như song song với BC, do đó giao điểm D nằm rất xa trên đường BC kéo dài, vậy $\frac{AB}{AC}$ làm sao bằng được $\frac{BD}{CD}$ (hình 21-2).



Hình 21-2

Thực tế thì vấn đề này không tồn tại, vì khi chứng minh định lí đường phân giác ngoài, điều kiện tiền đề là đường phân giác ngoài cắt cạnh đối diện cho dù giao điểm gần hay xa. Trong quá trình chứng minh, mỗi bước suy luận đều có căn cứ. Nếu giao điểm rất gần thì giá trị $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ gần bằng 1, cho rằng $\frac{AB}{AC} \neq \frac{BD}{CD}$ là không có căn cứ. Việc nêu ra vấn đề sai này chủ yếu là bị ảnh hưởng trực quan về hình vẽ.

Ta không những phải học cách nêu vấn đề chính xác mà còn phải học cách tự giải quyết vấn đề vì giải quyết vấn đề là mục đích cuối cùng của tư duy.

Có một lần trên lớp học giải phương trình vô tỉ $x + \sqrt{x-5} = 5$, sau khi thầy giáo phân tích đặc điểm phương trình chỉ chứa một nghiệm, làm thế nào để biến đổi phương trình vô tỉ thành phương trình dạng nguyên. Có học sinh nêu ý kiến chuyển vế x, bình phương hai vế được $(\sqrt{x-5})^2 = (5-x)^2$, sau khi đơn giản được $x^2 - 11x + 30 = 0$. Đó là dùng cách đồng thời bình phương hai vế để đưa phương trình vô tỉ thành phương trình dạng nguyên.

Có thật chỉ có một cách giải đó ? Những học sinh ham suy nghĩ không chịu dừng lại đó, họ muốn tìm phương pháp khác. Có người đưa ra cách đặt ẩn số phụ để đưa phương trình vô tỉ về dạng nguyên.

Đặt $y = \sqrt{x - 5}$ $(y \geq 0)$ ta sẽ có phương trình $y^2 + y = 0$.

Tức $(y + 1) = 0$, $y_1 = 0$, $y = -1$ (bỏ). Thay vào được

$\sqrt{x - 5} = 0$, nên $x = 5$.

Cách giải này đẹp quá ! có thể gọi là cùng nhạc công nhưng bản nhạc đã khác. Ngoài ra, tính tư duy độc lập còn biểu hiện ở chỗ tự mình phát hiện vấn đề. Ví dụ phát hiện và sửa người khác trả lời hoặc giải sai.

2) Tính tư duy sâu sắc. Tính tư duy sâu sắc cũng chính là tính logic trừu tượng của tư duy, tức là nói dùng khái niệm chính xác, dựa theo qui luật và phương pháp tư duy khoa học để tiến hành tư duy trừu tượng chính xác. Nếu ta cho tư duy là tiến hành gia công các tài liệu đã biết thì tính tư duy sâu sắc là chỉ sự gia công khoa học.

Tính tư duy sâu sắc là cơ sở của mọi phẩm chất tư duy. Nó tập trung biểu hiện ở đi sâu vào suy nghĩ vấn đề, nắm chắc qui luật và bản chất của vấn đề, dự kiến được tiến trình phát triển của sự vật.

Tính tư duy sâu sắc phải được bồi dưỡng và đánh giá trong quá trình hoạt động tư duy, vậy muốn nâng cao tính tư duy sâu sắc cần phải tốn công sức vào những mặt nào ?

Thứ nhất, phải nắm chính xác những phương pháp tư duy toán học thường dùng, như suy luận qui nạp và suy luận diễn dịch phải phối hợp hài hòa ra sao, đặc thù và phổ biến phải phối hợp ra sao, phân tích và tổng hợp phối hợp ra sao, v.v...

Thứ hai, tự giác vận dụng qui luật tư duy và các định lý, công thức, qui tắc trong toán học để phán đoán chính xác và suy luận, chứng minh một cách hợp lí.

Qui luật tư duy khoa học bao gồm rất nhiều nội dung. Trong tư duy toán học, logic hình thức và lôgic biện chứng là hai hình thức tư duy quan trọng nhất.

Thứ ba, có thể suy nghĩ một cách chặt chẽ, nghiêm ngặt, tức là nói phải suy nghĩ một cách toàn diện, chi tiết, phải xem xét hết mọi điều kiện có liên quan, suy nghĩ đến mọi trường hợp có thể.

Học sinh năm đầu cấp hai mới học đại số, phải đặc biệt chú ý bồi dưỡng thành thói quen suy nghĩ chặt chẽ. Đề bài dưới đây tưởng như dễ nhưng giải được một cách hoàn chỉnh thì không phải là không mất sức.

Biết số chẵn là 2n + 2 (n là số nguyên). Viết ra ba số chẵn liên tục bao gồm cả 2n + 2 và tìm tổng của chúng (nếu có nhiều trường hợp, bạn thử liệt kê ra những trường hợp có thể có).

Trong số 58 học sinh, khoảng 40% số học sinh chỉ có một loại kết quả là 3 số chẵn đó là 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6 hoặc 2n, 2n + 2, 2n + 4. Tổng của chúng là

$$(2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 6n + 12$$

hoặc

$$2n + (2n + 2) + (2n + 4) = 6n + 6.$$

16% số học sinh viết được hai trường hợp. Thực tế thì câu trả lời hoàn chỉnh là ba trường hợp :

(2n + 2) là số chẵn thứ nhất :

$(2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 6n + 12$

$(2n + 2)$ là số chẵn thứ hai :

$2n + (2n + 2) + 2(n + 4) = 6n + 6$

$(2n + 2)$ là số chẵn thứ ba.

$(2n - 2) + (2n) + (2n + 2) = 6n$

Có một số vấn đề vốn có hai hoặc hai khả năng trở lên, vì bị ảnh hưởng của thói quen nên đã không tự giác bỏ sót mất những khả năng khác.

Ví dụ 1. Em Hồng ngồi thuyền xuôi dòng đi từ A đến B, sau đó đi ngược trở lại đến C, tất cả mất 34 giờ. Biết rằng tốc độ thuyền xuôi dòng 10km/h, tốc độ nước chảy là 2,5km/h, khoảng cách AC = 10km. Tìm khoảng cách AB ?

Đặt khoảng cách AB là x km. Vậy khoảng cách BC sẽ là (10-x)km. Theo đề bài ta có : $\frac{x}{10} + \frac{x - 10}{10 - (2 \times 2,5)} = 4$.

Giải ra được x = 20km.

Đáp số : khoảng cách AB = 20km.

Giải đáp này không hoàn chỉnh, vì chỉ suy nghĩ trường hợp C ở phía dưới A. Thực ra thì căn cứ điều kiện đầu bài, C cũng có thể ở phía trên A. Nếu thế có thể có phương trình

$$\frac{x}{10} + \frac{x + 10}{10 - (2 \times 2,5)} = 4. \text{ Giải ra được } x = \frac{20}{3}.$$

Tức khoảng cách AB = $\frac{20}{3}$ km. Do đó, với đề này phải chia thành hai trường hợp để giải mới có đáp số hoàn chỉnh.

Vì sao lại chỉ xét đến một trường hợp ? Phần nhiều có thể là vì thứ tự tự nhiên của hai chữ AC trong điều kiện của đề bài "khoảng cách AC = 10km" dẫn đến cách nghĩ theo thói quen, cho rằng C nằm bên phải của A, như thế cũng tức là biến thành chỉ có trường hợp C nằm phía dưới hạ lưu của A.

Khái niệm trị tuyệt đối là khái niệm quan trọng trong đại số. Ta biết rằng, hai số bằng nhau thì trị tuyệt đối nhất định bằng nhau. Song, ngược lại thì không đúng nữa, tức $|a| = |b|$ nhưng không thể suy luận là a = b. Cách nói chính xác là $|a| = |b| \Rightarrow$ a = b hoặc a = –b. Ở đây trường hợp a = –b là dễ quên nhất. Vì nguyên nhân này mà khi một số học sinh làm bài tập, gặp phải vấn đề hai giá trị tuyệt đối bằng nhau thường bỏ sót nghiệm.

Ví dụ 2. Với giá trị nào của m trị tuyệt đối của hai nghiệm phương trình bậc hai $2(m + 3)x^2 + 4mx + 3m - 6 = 0$ bằng nhau ?

Vì $\Delta = 16m^2 - 8(m + 3)(3m - 6) = -8(m^2 + 3m - 18) = 0$

Nên $m^2 + 3m - 18 = 0$, do đó $m_1 = 3$ hoặc $m_2 = -6$.

Đem $m_1 = 3$, $m_2 = -6$ thay vào $k + 3 \neq 0$ theo đề bài ta được $m_1 = 3$ hoặc $m_2 = -6$

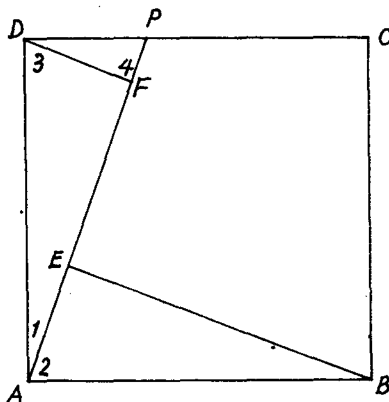
Ở đây ta đã bỏ sót một trường hợp : hai nghiệm ngược nhau $x_1 = -x_2$. Do đó phải dùng định lí Viét để giải quan hệ giữa nghiệm và hệ số.

Vì $x_1 + x_2 = 0$, nên $-\dfrac{4m}{2(m+3)} = 0$, vì $m = 0$ và $m \neq -3$.

Do đó đáp số hoàn chỉnh là m = –6, m = 0 hoặc m = 3.

Tính tư duy chặt chẽ còn yêu cầu từng lời nói phải có lí, từng bước phải có căn cứ. Về điểm này, trong mục "học tốt phần mở đầu hình học phẳng" đã sơ bộ đề cập đến. Dưới đây qua quá trình chứng minh tỉ mỉ của một đề hình học để giải phẫu chi tiết.

Ví dụ 3. Cho hình 21-3, trong hình vuông ABCD, điểm P trên cạnh CD, BE ⊥ AP ở E, DF ⊥ AP ở F.



Hình 21-3

Chứng minh AE = DF (đề thi cấp II Bắc Kinh năm 1987).

Chứng minh. Theo điều kiện đầu bài, muốn chứng minh AE = DF chỉ cần chứng minh tam giác ABE = tam giác DAF.

Có học sinh làm như sau :

Vì $\hat{2} = \hat{4}$ (1) AD = AB (2)

BE ⊥ AP ở E, DF ⊥ AP ở F (3)

ΔABE = ΔDAF (4)

AE = DF (5)

Rõ ràng quá trình chứng minh ở trên nhiều chỗ nhảy cóc rất nghiêm trọng.

Bước thứ nhất "vì $\hat{2} = \hat{4}$," để bài chưa trực tiếp cho điều kiện này. Đáng lẽ theo đầu bài ABCD là hình vuông", suy ra AB//DC. Tiến thêm bước nữa suy ra $\hat{2} = \hat{4}$, ở đây thiếu hai mắt xích : thiếu tiền đề "ABCD là hình vuông" và "AB//DC". Đó là những bước nhảy cóc nghiêm trọng.

Bước thứ hai "AD = AB" cũng không phải là điều kiện đề bài cho trực tiếp, nó cũng là từ điều kiện "hình vuông ABCD" suy ra.

Từ bước ba đến bước bốn, điều kiện hai tam giác bằng nhau chưa đưa ra đầy đủ, còn thiếu hai điều kiện $\widehat{AEB} = \widehat{DFA} = 90^o$ và $\hat{2} = \hat{3}$ (hoặc $\hat{B} = \hat{1}$).

Có lẽ có bạn sẽ nói, những điều nói ra ở trên tôi đều biết nhưng viết thế dài dòng quá ! Đúng. Viết như thế so với nhảy cóc dài dòng hơn nhiều, nhưng đó là điều kiện không thể thiếu. Trong chứng minh ta cố gắng ngắn gọn, khắc phục rườm rà, nhưng muốn ngắn gọn một cách chính xác thì không phải là dựa vào nhảy cóc mà dựa vào cách suy nghĩ ngắn gọn đẹp đẽ. Cắt bỏ lung tung chỉ tổ tạo thêm quá trình suy luận khiếm khuyết, kết quả ngược lại.

Dưới đây ta viết lại một cách hoàn chỉnh.

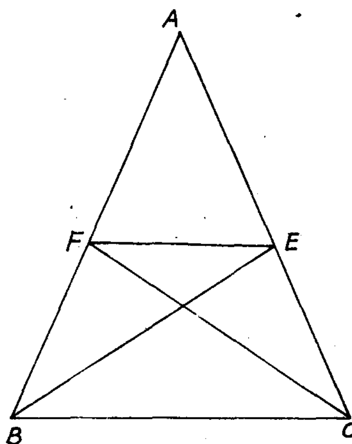
Chứng minh : Vì ABCD là hình vuông nên AD = AB, AB // DC, vì $\widehat{2} = \widehat{4}$ và BE ⊥ AP ở E, DF ⊥ AP ở F, nên $\widehat{AEB} = \widehat{DFA} = 90^{o}$.

Vì $\widehat{3} + \widehat{PDF} = 90^{o}$, $\widehat{4} + \widehat{PDF} = 90^{o}$

nên $\widehat{3} = \widehat{4}$, và $\widehat{3} = \widehat{2}$.

Do đó ΔABE = ΔDAF, nên AE = DF.

Trong suy luận không được nghĩ là đương nhiên. Nhiều học sinh suy luận không chặt chẽ thường là vì suy không ra nên nghĩ đó là đương nhiên rồi kết luận một cách võ đoán.



Hình 21–4

Ví dụ 4. Cho hình 21 - 4, tam giác cân AB = AC, hai đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ lần lượt cắt AC, AB ở E và F. Chứng minh EF // BC.

Có học sinh chứng minh như sau :

vì $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$ (1) ; $\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$ (2)

Nên : EC = BF, BCEF là hình thang (3) EF // BC (4)

Phân tích toàn bộ quá trình giải, ta sẽ phát hiện bước nào cũng có vấn đề.

Bước thứ nhất "vì $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$, $\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$" thật ra trong điều kiện bài toán không cho trực tiếp, mà phải căn cứ điều kiện đã biết "hai đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ lần lượt cắt AC, AB ở E và F" để suy ra, tức thiếu tiền đề.

Từ bước một đến bước hai, không hề lấy định lí nào làm căn cứ. Thực ra nếu không có điều kiện AB = AC thì bước một không thể suy ra EC = BF. Xem hình ta thấy trong EC = FB nhưng ta

không được dựa vào hình để kết luận. Đó là sự nhảy cóc nghiêm trọng, trong đó thiếu mất nhiều bước suy luận :

Vì AB = AC, nên $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB}$, ta có $\frac{AE + EC}{EC} = \frac{AF + FB}{FB}$ (định lí cộng tỉ lệ) tức $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{FB}$, nên EC = FB.

Từ bước hai sang bước ba lại nhảy cóc nghiêm trọng.

Từ bước ba sang bước bốn phạm sai lầm về đảo ngược quan hệ lôgic.

Vì phương pháp duy nhất để phán đoán hình thang là định nghĩa : "tứ giác là hình thang khi chỉ có hai cạnh đối nhau song song". Để chứng minh BCEF là hình thang, trước hết phải chứng minh EF//BC. Khi còn chưa chứng minh được EF // BC thì làm sao lại có trước kết luận BCEF là hình thang ? Nguyên nhân chính tạo ra sự hỗn loạn này là từng bước một không bám sát : suy luận cần phải có căn cứ.

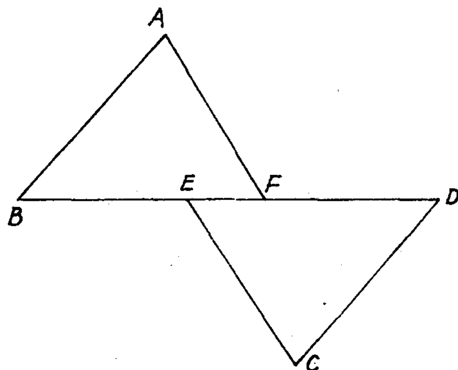
Thử nghĩ xem, các lời giải đáp dưới đây có đúng không ?

1) Từ $x^2 = 3^2$ được x = 3

2) Nếu a > 2 thì $|2-|2-a|| = a - 4$

3) Cho hình 21-5, biết AB//CD ; BE = FD, AB = CD ; B, E, F, D thẳng hàng. Tìm AF = CE ?

Chứng minh : Vì AB = CD, $\hat{B} = \hat{D}$,



Hình 21-5

BE = FD, nên ΔABF = ΔCDE, ta có AB = CD.

4) Đơn giản $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ $(x \geq 1)$

Giải : Biểu thức ban đầu $= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$

$= \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = 2\sqrt{x-1}$.

5) Đơn giản $\dfrac{(b^2+1)+(b^2-1)}{2b} = \dfrac{2b^2}{2b} = b$.

6) Qua hai điểm A, B trong tọa độ, hạ AA', BB' xuống vuông góc với trục X tại A' và B'. $|AA'| = 3$, $|BB'| = 2$, $|A'B'| = 1$. Tìm $|AB|$?

(Đáp số : $|AB| = \sqrt{2}$).

7) Nếu $\sin^2 75^o + \cos^2 A = 1$ thì A = ... (Đáp số : A = 75°)

8) Vì sinAcosA = sinB cosB, A + B + C = 180° nên $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{C} = 90^o$.

9) Tam giác cân có 1 cạnh bằng 5cm, chu vi bằng 13cm, hai cạnh khác dài là ... (Đ.S : 5cm và 3cm).

10) Biết tam giác cân có đường phân giác góc đáy chia chu vi thành hai phần : 63 và 36 (hình 21 - 6). Tìm cạnh bên ?

Giải : AB + AD = 63, BC + CD = 36.

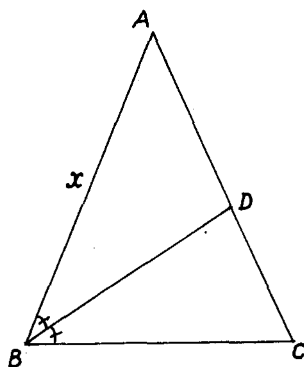
Đặt AB = x, BC = y thì

AD = 63 - x, CD = 36 - y.

Vì BD là phân giác $\hat{B}$, nên $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$.

Ta có $\dfrac{63-x}{36-y} = \dfrac{x}{y}$. Hơn nữa AD+ + DC = AC,

Vì (63 - x) (36 - y) = x , nên x = 38,5. Đ.S : Cạnh bên bằng 38,5 cm.



Hình 21–6

11) Biết phương trình $x^2 + 2(m - 2)x + m^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm số thực, và tổng bình phương của hai nghiệm lớn hơn tích của chúng 21. Tìm giá trị của m (đề thi cấp hai Bắc kinh năm 1987).

Giải : Giả thiết phương trình $x^2 + 2(m - 2) + m^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2.

$$x_1 + x_2 = -2(m - 2),\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 4.$$

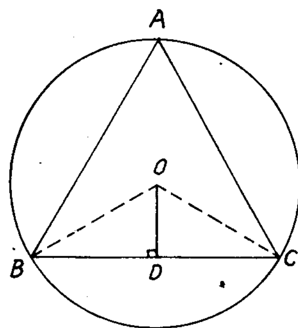
Theo đề ra ta có :

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 21 \rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 21$$

$[-2(m - 2)]^2 - 3(m^2 + 4) = 21$ tức $m^2 - 16m - 17 = 0$.

Giải được $m_1 = 17$, $m_2 = -1$.

12) O là tâm của vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC, R là bán kính đường tròn, nếu sinA = cosB sinC và khoảng cách từ O đến BC bằng một nửa R. Tìm số đo độ của góc $\widehat{ABC}$ (hình 21-7).



Hình 21-7

Giải : Như hình vẽ, vì

sinA = 2cosB sinC nên $\dfrac{\sin A}{\sin C} = 2\cos B$.

Ta có $\dfrac{a}{c} = \dfrac{2(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$ nên

$a^2 = a^2 + c^2 - b^2$ do đó $b = c$.

Nối OB, OC được OB = OC. Vì $OD \perp BC$, $OD = \dfrac{1}{2} OB$

Nên $\widehat{OBD} = 30^o$, $\widehat{BOC} = 120^o$, nên $\hat{A} = 60^o, \hat{B} = \hat{C} = 60^o$

$\widehat{ABC} = 60^o$.

Toán cấp ba về tư duy trừu tượng và tư duy tổng hợp rộng và sâu hơn rất nhiều so với toán cấp hai. Do đó đòi hỏi tính tư duy sâu sắc càng cao, nó biểu hiện nổi bật ở chỗ :

i) Chú trọng nắm vững bản chất khái niệm. Bản chất khái niệm của toán thể hiện ở trong các tính chất đặc trưng của định nghĩa khái niệm. Khi học một khái niệm mới đầu tiên phải nhận biết rõ nó khác với các khái niệm đã học ở chỗ nào ?

Ví dụ, khái niệm đường thẳng khác mặt phẳng. Căn cứ định nghĩa thì đường thẳng khác mặt phẳng là "hai đường thẳng không cùng nằm chung trong bất kì mặt phẳng nào". Rõ ràng nó khác với hai đường thẳng cắt nhau hoặc song song với nhau ở chỗ : hai đường thẳng nằm trong cùng mặt phẳng, tức là các đường thẳng chung mặt phẳng. Còn đường thẳng khác mặt phẳng là "không cùng nằm chung trong bất kì mặt phẳng nào". Do đó bản chất của hai đường thẳng khác mặt phẳng hiện rõ ra trước mắt ta : hai đường thẳng "không cùng nằm chung trong bất cứ mặt phẳng nào". Nắm chắc được bản chất này ta sẽ giải quyết được những vấn đề liên quan đến nó.

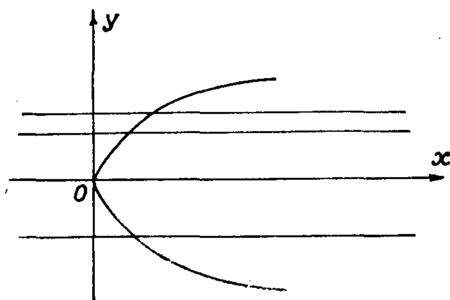
Ví dụ : Cho biết $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, $a \parallel l$, $b \parallel l$. Hỏi a, b có phải là hai đường thẳng khác mặt phẳng không ?

Ở đây tuy a, b phân biệt nằm trong hai mặt phẳng α và β, nhưng không thể vì thế mà rút ra kết luận a, b là hai đường thẳng khác mặt phẳng. Lí do rất đơn giản, vì $\left.\begin{matrix} a \parallel l \\ b \parallel l \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b.$

a và b có thể xác định được một mặt phẳng, giả thiết là γ. Như thế tức là a, b cùng trong mặt phẳng γ, chúng không phải là hai đường thẳng khác mặt phẳng.

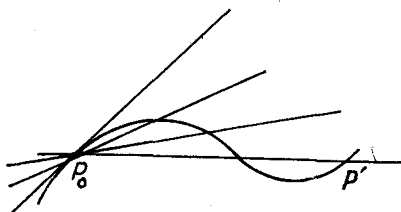
Trong hình học phẳng ở cấp hai, đường tiếp tuyến của đường tròn được hiểu là giữa đường thẳng và đường tròn có một điểm chung.

Còn ở hình học giải tích cấp ba, sau khi học đường cong hình nón, lại mang nhận thức đường thẳng và đường cong chỉ có một điểm chung để hiểu đó là tiếp tuyến của đường cong thì không



Hình 21–8

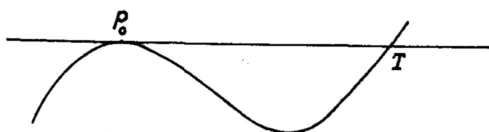
còn đúng nữa. Ví dụ lấy đường parabol ra để nói, tất cả những đường thẳng song song với trục parabol đều chỉ có một điểm chung với đường cong parabol, nhưng loại đường thẳng đó không phải là đường tiếp tuyến của parabol (hình 21-8). Do đó không thể dùng khái niệm tiếp tuyến của đường tròn để hiểu khái niệm tiếp tuyến của đường cong. Tiếp tuyến l đối với đường cong C tại điểm P_O, nên từ góc độ giới hạn để nhận thức điểm P_O.



Hình 21–9

$$l = \lim_{p' \to P_o} l' \qquad \text{(hình 21-9)}$$

Trên hình 21–10 ta thấy được đường thẳng P_OT với đường cong tuy có hai điểm chung, nhưng tại điểm P_O nó lại là tiếp tuyến.



Hình 21–10

Do đó có thể thấy, bản chất của khái niệm đường tiếp tuyến tại điểm P_O của đường cong là giới hạn của cát tuyến P_OP' đi qua điểm P_O khi P' tiến dần đến P_O. Khái niệm tiếp tuyến của đường tròn trong hình học phẳng chỉ là trường hợp đặc biệt của khái niệm tiếp tuyến đường cong nói chung.

Ta xét một ví dụ :

Quy tắc bốn phép tính của giới hạn : nếu $\lim_{n \to \infty} a_n = A$, $\lim_{n \to \infty} b_n = B$ thì $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$. Phải hiểu rằng : qui tắc chỉ nói đến giới hạn của tổng một số hữu hạn các dãy số có giới hạn bằng tổng giới hạn của các giới hạn riêng lẻ. Qui tắc không bao gồm việc đi tìm tổng giới hạn của vô số các dãy số.

Do đó khi gặp trường hợp tìm giới hạn tổng của vô số các dãy số không được dùng qui tắc này, nếu không sẽ phạm sai lầm có tính nguyên tắc. Ví dụ, giải để tìm giới hạn dưới đây :

Tìm $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2} \right).$$

Có học sinh làm như sau :

Biểu thức ban đầu $$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n^2} + ... + \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2}$$

$$= 0 + 0 + ... + 0 = 0.$$

Kết quả này đúng không ? Ta giải dưới một góc độ khác.

Biểu thức ban đầu $$= \lim_{n \to \infty} \frac{1+2+...+n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tất nhiên cách giải sau mới đúng, vì nó áp dụng đúng qui tắc giới hạn của tổng, còn cách giải đầu thực chất là tổng của vô số giới hạn bằng không, nó khác với tổng của một số hữu hạn các số không. Cách đầu sai là ở chỗ tìm tổng của vô hạn số.

ii) Chú trọng đến mối liên hệ lẫn nhau giữa các khái niệm. Vì hệ thống các khái niệm toán học là một hệ thống logic phát triển dần dần mà thành, cho nên bất kì khái niệm toán học nào cũng không tồn tại một cách riêng rẽ, nó thường với một vài khái niệm nào đó liên kết lại theo một kết cấu nhất định. Do đó chỉ hiểu và nắm vững bản chất của một khái niệm toán học thì chưa đủ. Để có thể giải quyết được một vấn đề tương đối khó, chúng ta còn phải dựa vào mối liên hệ giữa các khái niệm để đi sâu vào hiểu chắc khái niệm đó. Phải liên hệ hai hoặc từ hai khái niệm trở lên lại với nhau để xem xét vấn đề, tức là giữa các tính chất mà những khái niệm này phản ánh có quan hệ suy ra nhau không.

Ví dụ, ở năm đầu của cấp ba, trong đại số có học tập hợp, ánh xạ, ánh xạ một một và ánh xạ nghịch, v.v..., lấy những khái niệm này làm cơ sở để xây dựng nên khái niệm hàm số ngược. Đó là khái niệm quan trọng trong toán học phổ thông. Đồng thời trước đó đã học tính đơn điệu của hàm số và khái niệm chẵn lẻ của hàm số. Như vậy, sau khi ta đã hiểu được bản chất hàm số ngược là do ánh xạ ngược xác định thì cần phải từ góc độ tính chất của hàm số để phân tích hàm số ngược gồm có những tính chất của hàm số để phân tích hàm số ngược gồm có những tính chất gì ? Đặc biệt là phải liên hệ với tính đơn điệu và tính chẵn, lẻ của hàm số để mà phân tích.

Quan hệ của hàm số ngược và tính đơn điệu. Hàm số ngược và nguyên hàm có phải có tính đơn điệu giống nhau không ? Tính đơn điệu của hàm số có phải là điều kiện cần và đủ để tồn tại hàm số ngược ?

Quan hệ của hàm số ngược và tính chẵn lẻ. Nguyên hàm là hàm số lẻ thì hàm số ngược của nó cũng là hàm số lẻ phải không ? Nguyên hàm không lẻ không chẵn thì có phải là hàm số ngược của nó cũng là hàm số không lẻ, không chẵn ? Tức hàm số ngược và nguyên hàm có phải là có tính chẵn lẻ giống nhau ?

Những vấn đề này trong sách học chưa cho kết luận đầy đủ, còn chờ ta làm sáng tỏ trong quá trình học tập.

Chỉ cần suy nghĩ cẩn thận hai vấn đề trên thì sẽ rút ra kết luận dưới đây :

Kết luận 1 : Hàm số đơn điệu tất có hàm số ngược và hàm số ngược cùng nguyên hàm có tính đơn điệu giống nhau.

Kết lùận 2. Tính đơn điệu của hàm số là điều kiện đủ để tồn tại hàm số ngược :

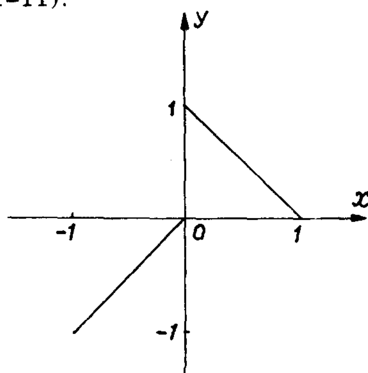
Ví dụ. Hàm số $f(x) = \begin{cases} x\ ,\ x \in [-1,0] \\ -x + 1\ ,\ x \in [0,1] \end{cases}$

Rõ ràng f(x) không đơn điệu ở [-1,1], nhưng tồn tại hàm số ngược $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x) = f(x)$ (hình 21-11).

Kết luận 3.

1) Tồn tại hàm số lẻ của hàm số ngược, hàm số ngược của nó vẫn là hàm số lẻ.

2) Tồn tại hàm số không chẵn, không lẻ của hàm số ngược, hàm số ngược của nó vẫn là hàm số không chẵn, không lẻ.



Hình 21-11.

iii) Chú trọng tính chặt chẽ trong suy xét vấn đề. Suy xét vấn đề một cách kín kẽ, nghiêm ngặt là tiêu chí quan trọng của tính tư duy sâu sắc. Tính trừu tượng của toán cấp ba rất cao, rất nhiều vấn đề được đưa về kiến thức thuộc phạm vi lấy giá trị của các đại lượng bằng chữ hoặc mối quan hệ giữa toàn bộ và bộ phận. Ở đây vừa có vấn đề về đại số vừa có vấn đề về hình học. Do đó, trong quá trình giải bài tập nhất định phải bồi dưỡng thành thói quen suy nghĩ kín kẽ, nghiêm ngặt, tuyệt đối không được phiến diện, hoặc cho vấn đề đó là đương nhiên. Đồng thời phải bồi đắp nền tảng kiến thức, tích lũy kinh nghiệm, hiểu rõ làm thế nào cho suy nghĩ vấn đề được chặt chẽ, kín kẽ.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\log_{0,5x} x - 2\log_{4x} x = 0$.

Có học sinh thay cơ số và biến đổi được :

$$\frac{1}{\log_x 0,5x} - \frac{2}{\log_x 4x} = 0 \qquad (1)$$

Tức $$\frac{1}{1 - \log_x 2} - \frac{2}{1 + 2\log_x 2} = 0 \qquad (2)$$

Chỉnh lí xong ta được : $\log_x 2 = \frac{1}{4}$ (3)

$$x = 16$$

Có phải bài này chỉ có một đáp số ? Thực tế thì $x = 1$ cũng là đáp số của bài toán. Vậy ở bước biến đổi nào có vấn đề ? Phân tích quá trình giải ta thấy ở bước 1, khi thay cơ số và biến đổi thành phương trình (1) đã co hẹp khoảng xác định của hàm số : từ ban đầu $x > 0$ và $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{4}$ biến thành $x > 0$ và $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{4}$ mà phạm vi thu nhỏ lại vừa đúng nghiệm của phương trình ban đầu. Xem thường phương trình biến đổi gây nên thu hẹp khoảng định nghĩa, dẫn đến bỏ sót nghiệm đó là một biểu hiện cụ thể tư duy không chặt chẽ. Đối với đề này, nếu dùng cách thay cơ số log thông thường thì không gây ra thay đổi khoảng định nghĩa, nên sẽ không bỏ sót nghiệm. Phương trình ban đầu có thể biến đổi như sau :

$$\frac{\lg x}{\lg 0,5x} - \frac{2\lg x}{\lg 4x} = 0$$

tức $$\lg x\left(\frac{1}{\lg 0,5x} - \frac{2}{\lg 4x}\right) = 0$$

vì $\lg x = 0$ (1) hoặc $\frac{1}{\lg 0,5x} - \frac{2}{\lg 4x} = 0$ (2)

Từ (1) được $x = 1$, từ (2) được

$$2\lg 2 + \lg x - 2\lg x + 2\lg 2 = 0$$

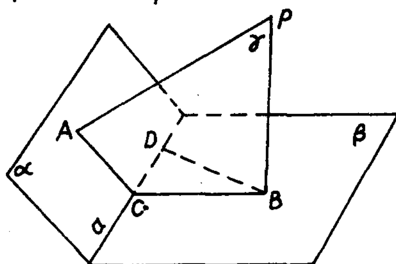
nên $\lg x = 4\lg 2$ do đó $x = 16$

Kiểm tra thấy x = 1, x = 16 phù hợp với phương trình đã cho. Nên tập nghiệm của phương trình là {1,16}.

Trong hình học lập thể có khái niệm về góc phẳng nhị diện. Xem ra khái niệm này có vẻ dễ hiểu và dễ nắm vững, nhưng nếu không chú ý cũng dễ mắc sai lầm

Ví dụ 2. Biết điểm P trong góc nhị diện $\alpha - a - \beta$. Khoảng cách từ P đến hai mặt phẳng α và β là PA = 8cm, PB = 5cm và AB = 7cm. Tìm độ lớn góc nhị diện $\alpha - a - \beta$.

Các bạn học sinh đều biết, muốn đo góc nhị diện là nhờ vào mặt phẳng của nó. Do đó làm sao vẽ ra góc nhị diện là điểm then chốt. Có học sinh cho rằng điều đó rất dễ : qua hai điểm A và B lần lượt vẽ các đoạn thẳng vuông góc với giao tuyến a, giả thiết nó cắt a tại C (hình 21-12).



Hình 21-12

Ta có thể nghi ngờ hỏi : vì sao chân hai đoạn thẳng vuông góc với giao tuyến A đều ở C ? Rõ ràng, nói chung từ hai điểm A, B ở trong hai mặt phẳng giao nhau hạ các đoạn thẳng vuông góc xuống giao tuyến a thì vị trí chân các đoạn thẳng đó là hai điểm khác nhau. Cho nên vẽ góc nhị diện như thế là không có căn cứ. Không giải thích rõ vì sao chân hai đoạn thẳng vuông góc đó bắt buộc tại một điểm chung, đó cũng là biểu hiện tư duy chưa chặt chẽ.

Thực tế thì có thể chứng minh chân hai đoạn vuông góc tất phải cùng một điểm. Vì PA $\perp$ α ở A, nên a $\perp$ PA và a $\perp$ PA, nên a $\perp$ mpPAC.

Tương tự, a $\perp$ PBD nên mpPAC và mpPAD trùng nhau, do đó C, D trùng nhau.

Trong chứng minh trên, ta đã tìm được cách vẽ đơn giản góc phẳng nhị diện :

Qua PA, PB vẽ mặt phẳng γ gặp a ở C. Ta có :

$\alpha \cap \gamma = AC$, $\beta \cap \gamma = BC$. vì $PA \perp \alpha$, $PB \perp \beta$ nên $a \perp PA$, $a \perp PB$.

Vì $a \perp \gamma$, nên $a \perp AC$, $a \perp BC$ nên $\widehat{ABC}$ là góc phẳng nhị diện $\alpha - a - \beta$.

3. Tư duy linh hoạt. Tư duy linh hoạt là chỉ trong quá trình giải quyết vấn đề, có thể nhanh chóng chuyển từ hướng tư duy này sang hướng tư duy khác. Lúc gặp đề khó, có người kế này không thành thì tìm ra kế khác, có người thì chịu, loay hay mãi không ra. Qua đó thấy rõ tính linh hoạt trong tư duy của họ rất khác nhau.

Người tư duy linh hoạt mạnh, biểu hiện ở tính ứng biến rất cao. Họ không những dễ tìm được cách giải quyết vấn đề, mà còn nhanh và phương pháp tốt. Luôn chú ý bồi dưỡng tính tư duy linh hoạt không những có lợi cho tính tư duy độc lập mà đối với năng lực tư duy sáng tạo cũng có tác dụng rất quan trọng.

Từ những mặt nào để bồi dưỡng tính tư duy linh hoạt ?

i) Diễn đạt nhiều cách khác nhau một mệnh đề hay vấn đề nào đó. Ta biết rằng : hiểu sâu vấn đề cần giải quyết là then chốt để giải quyết vấn đề. Độ sâu của sự hiểu biết này chủ yếu thể hiện ở nắm vững bản chất vấn đề và biểu đạt nó dưới những dạng khác nhau. Học cách biến hóa thay đổi sự diễn đạt vấn đề không những có lợi nối thông các kiến thức liên quan với nhau mà còn có lợi cho việc vận dụng linh hoạt các kiến thức.

Trước hết ta xem xét một mệnh đề đơn giản "a so với b lớn hơn 3", ta có thể viết thành nhiều mệnh đề mà ý nghĩa như nhau như : "b nhỏ hơn a 3" "a trừ 3 bằng b" "b cộng 3 bằng a" "trên trục số lấy điểm a nằm bên phải điểm b 3 đơn vị" "số không lớn hơn b 3 đơn vị thì không phải là a", "a + 1 lớn hơn b 4 đơn vị" v.v...

Dưới đây có những mệnh đề phức tạp hơn.

Nếu ab = 2. (a, b là số thực) thì hệ phương trình bậc nhất

$$\begin{cases} ax + 2y = 6 \\ x + by = -3 \end{cases}$$ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

Có thể viết lại mệnh đề đó như sau :

Nếu a.b = 2 (a, b là số thực) thì hai đường thẳng $ax + 2y = 6$ và $x + by = -3$ song song hoặc trùng nhau ;

Nếu ab = 2 (a, b là số thực) thì hệ phương trình bậc nhất $\begin{cases} ax + 2y = 6 \\ x + by = -3 \end{cases}$ không thể có một nghiệm duy nhất ;

Nếu ab = 2 (a, b là số thực) thì hai đường thẳng $ax + 2y = 6$ và $x + by = -3$ không thể cắt nhau ;

Nếu hệ phương trình $\begin{cases} ax + 2y = 6 \\ x + by = -3 \end{cases}$ (a, b là số thực) có duy nhất một nghiệm thì $ab \neq 2$.

Đương nhiên, nếu cần ta còn có thể thay đổi cách diễn đạt nữa.

Dưới đây nêu hai ví dụ về toán cấp ba.

Ví dụ 1. Giả thiết hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn quan hệ $Z_1\overline{Z}_2 + \overline{A}Z_1 + \overline{A}Z_2 = 9$, trong đó A là số phức khác không. Chứng minh $\left|\frac{Z_1 + A}{Z_2 + A}\right| = \frac{Z_1 + A}{Z_2 + A}$.

Đây là đề thi vào đại học năm 1987, là một trong những đề học sinh làm điểm thấp, rất nhiều học sinh cảm thấy không biết bắt đầu từ đâu, dữ kiện cách kết luận quá xa. Kì thực là chỉ cần quan sát kĩ điều cần chứng minh thì sẽ phát hiện $\frac{Z_1 + A}{Z_2 + A}$ là một số thực dương, hơn nữa đúng bằng mô đun của nó. Do đó ta biến đổi kết luận của mệnh đề :

Thử chứng minh $\frac{Z_1 + A}{Z_2 + A} \in R$ và $\frac{Z_1 + A}{Z_2 + A} > 0$. Như vậy chuyển từ vấn đề chứng minh đẳng thức sang trước hết chứng minh $\frac{Z_1 + A}{Z_2 + A}$ là một số thực dương.

Chứng minh như sau :

Vì $Z_1\overline{Z}_2 + \overline{A}Z_1 + A\overline{Z}_2 = 0$

$$\frac{Z_1 + A}{Z_2 + A} = \frac{(Z_1 + A)(\overline{Z}_2 + \overline{A})}{(Z_2 + A)(\overline{Z}_2 + \overline{A})} = \frac{Z_1\overline{Z}_2 + A\overline{Z}_2 + \overline{A}Z_1 + A\overline{A}}{|Z_2 + A|^2} = \frac{|A|^2}{|Z_2 + A|^2} > 0$$

Ví dụ 2. Giả thiết a và b là hai số dương khác nhau, m là số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh $\frac{a^m + b^m}{2} > \left(\frac{a + b}{2}\right)^m$

Loại đề này thường dùng phép qui nạp để chứng minh, nhưng khi chứng minh n = k+1, làm sao để lợi dụng được giả thiết của phép qui nạp là không dễ. Nếu chú ý đến đặc điểm kết cấu $\frac{a + b}{2}$ của vế phải, đặt ẩn số phụ

Đặt $\begin{cases} a = u + v \\ b = u - v \end{cases}$ thì $\begin{cases} u = \dfrac{a + b}{2} \\ v = \dfrac{a - b}{2} \neq 0 \end{cases}$ ta có thể biến đổi đề thành

"Giả thiết u > 0, v ≠ 0, m là số nguyên lớn hơn 1, chứng minh $\frac{1}{2}\left[(u + v)^m + (u - v)^m\right] > u^m$".

Do đó chỉ cần triển khai theo định lí hai số hạng và đơn giản vế trái thì sẽ giải quyết thuận lợi.

Đối với các vấn đề toán học cũng có thể biến đổi cách diễn đạt. Ví dụ "Tìm xem với giá trị nào của m, phương trình $x^2 + 2x + m + 1 = 0$ không có nghiệm thực" ? Các bạn học sinh đã động não tích cực, đề xuất bốn cách diễn đạt khác nhau như sau :

– Tìm khi m có giá trị nào, giá trị của $x^2 + 2x + m + 1$ luôn lớn hơn không ?

– Với giá trị nào của m, đồ thị parabol $y = x^2 + 2x + m + 1$ không cắt trục x ?

– Tìm giá nào của m, đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x + m + 1$ nằm phía trên trục x ?

– Nếu parabol $y = x^2 + 1$ ở phía trên đường thẳng $y = -2x - m$, tìm phạm vi lấy giá trị của m ?

Bốn cách diễn đạt ở trên đã liên kết việc thảo luận nghiệm của phương trình bậc hai với vấn đề giải bất đẳng thức bậc hai, giữa đồ thị hàm số bậc hai với vị trí trục x, giữa đường cong parabol với vị trí đồ thị hàm số bậc nhất. Như vậy không những đã nối thông những kiến thức học từng đoạn trước đây, làm cho nó hệ thống hóa mà còn tiến một bước sâu thêm hiểu ý nghĩa hình học đối với bất đẳng thức bậc hai và nghiệm của phương trình bậc hai.

Từ ví dụ biến đổi hình thức diễn đạt ở trên, có thể qui nạp ra các phương pháp quan trọng để biến đổi cách diễn đạt như sau :

1) Liên tưởng. Từ các điểm giống nhau của các kiến thức khác nhau mà liên tưởng, kết hợp với hình mà liên tưởng.

2) Phân giải : Chia một vấn đề ra thành nhiều bộ phận liên quan với nhau, tổ hợp thành một vấn đề mới (như cách diễn đạt thứ tư), đó là cách diễn đạt có tính sáng tạo độc đáo.

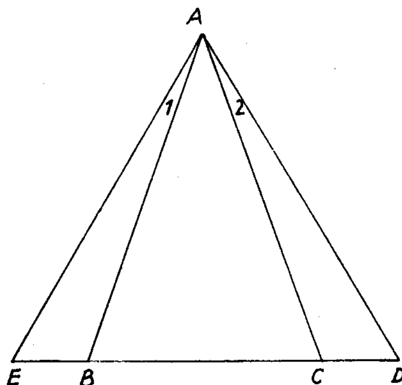
ii) Tìm cho hết các điều kiện có thể có. Trong mệnh đề $\alpha \Rightarrow \beta$ trong trường hợp thông thường α và β không chỉ là một điều kiện mà là một nhóm điều kiện. Trong toán, người ta gọi β là điều kiện cần của α. (Có thể hiểu như thế này : mệnh đề $\alpha \Rightarrow \beta$ cùng với mệnh đề ngược phủ định của nó : không phải $\beta \Rightarrow$ không phải α đều là thật, tức là không có điều kiện β thì không có điều kiện α, do đó β là điều kiện không thể thiếu để α được thành lập). Gọi α là điều kiện đủ của β (có thể hiện như sau : từ $\alpha \Rightarrow \beta$, có thể thấy, muốn cho điều kiện β thành lập chỉ cần có điều kiện α là đủ, không cần có bất kỳ điều kiện nào nữa). Đối với điều kiện α, sẽ nảy ra những kết luận gì ? tức điều kiện cần của α là những gì ? Tương tự, đối với điều kiện β điều kiện đủ để thành lập nó là gì ? Thành thạo trong việc tìm ra các điều kiện có thể có là điều kiện không thể thiếu được để bồi dưỡng khả năng tư duy linh hoạt. Dưới đây nêu một ví dụ về tìm điều kiện cần. Ví dụ này học sinh cấp hai có thể làm được. Nếu bạn đã học về hai tam giác bằng nhau thì nên thử xem.

Ví dụ 1. Trên hình 21–13, $\hat{1} = \hat{2}$, AB = AC, căn cứ vào các điều kiện đã cho đó, bạn có thể rút ra kết luận gì ?

Ta rất dễ nhớ đến nhiều kết luận :

1) $\hat{B} = \hat{C}$. 2) $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$, 3) AD = AE.
4) $\Delta ABD = \Delta ACE$. 5) BD = CE.
6) $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. 7) $\widehat{BAE} = \widehat{CDA}$
8) BE = CD. 9) $\Delta BAE = \Delta CAD$.
10) $S_{BAE} = S_{CAD}$. 11) $\dfrac{S_{BAD}}{S_{BAE}} = \dfrac{BD}{BE}$.

12) Các vòng tròn ngoại tiếp của hai tam giác ABE và ACD bằng nhau.



Hình 21 – 13

Ta lại xem tìm điều kiện đủ như thế nào. Ví dụ thử tổng kết xem trong hình học muốn chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau cần có những điều kiện nào ? Khi làm bài chứng minh, để mở ra hướng suy nghĩ, cần phải thạo dựa vào điều kiện đã biết và điều cần chứng minh, cố tìm ra những điều kiện để đi đến kết luận.

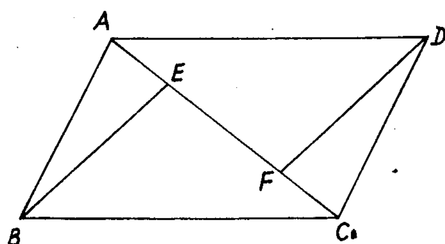
Ví dụ 2. Cho hình vẽ 21 – 14, E và F là hai điểm trên đường chéo AC của hình bình hành ABCD và AE = FC.

Chứng minh BE = DF.

Phân tích : Điều kiện đủ để BE = DF là gì ? Kết hợp với các điều kiện đã cho, tối thiểu có thể tìm ra bốn cái.

BE = DF ⇐ {
ΔABE = ΔCDF
ΔBEC = ΔDFA
ΔBEF = ΔDFE (nối BE, DF)
Tứ giác BEDF là hình bình hành
. . . .

Trong bốn điều kiện trên, ba điều kiện đầu là hai tam giác bằng nhau, còn điều kiện thứ tư là hình bình hành, đó là điều kiện độc đáo khác của ba điều kiện trước.



Hình 21–14

Sau khi tìm được các điều kiện, còn phải so sánh chúng, xem cái nào dễ chứng minh hơn, từ đó mà tìm ra phương pháp chứng minh ngắn gọn đơn giản.

iii) Tìm nhiều cách giải khác nhau.

Ví dụ 1. Tính $\left(\frac{x}{2} + 5\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - 5\right)^2$.

Cách giải 1. Lợi dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để triển khai.

Phép tính ban đầu = $\left(\frac{x^2}{4} + 5x + 25\right) - \left(\frac{x^2}{4} - 5x + 25\right) = 10x$.

Cách giải 2. Phép tính có dạng hiệu của hai bình phương, ta áp dụng ngược hằng đẳng thức đáng nhớ :

Phép tính ban đầu = $\left(\frac{x}{2} + 5 + \frac{x}{2} - 5\right)\left(\frac{x}{2} + 5 - \frac{x}{2} + 5\right) = x \times 10 = 10x$.

Cách giải 3. Quan sát cơ số số hạng thứ nhất và thứ hai chênh nhau 10 tức là $\left(\frac{x}{2} + 5\right) - \left(\frac{x}{2} - 5\right) = 10$, từ đó ta nhớ đến biến đổi số hạng thứ nhất thành dạng khác.

Phép tính ban đầu =

$$= \left(\frac{x}{2} - 5 + 10\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - 5\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - 5\right)^2 + 20\left(\frac{x}{2} - 5\right) + 100 - \left(\frac{x}{2} - 5\right)^2$$

$= 10x$

So sánh ba cách giải, bạn cảm thấy cách nào hay hơn ?

Ví dụ 2. Biến đổi $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$ thành dạng tích.

Cách giải 1. Phân số hạng 1 và 2, số hạng 3 và 4 thành nhóm.

Biểu thức ban đầu $= (x^3 + x^2y) - (xy^2 + y^3)$

$$= x^2(x + y) - y^2(x + y) = (x + y)(x^2 - y^2)$$

$$= (x + y)(x + y)(x - y) = (x + y)^2(x - y)$$

Cách giải 2. Nhóm các số hạng 1 và 3 lại, các số hạng 2 và 4 lại, có :

Biểu thức ban đầu $= (x^3 - xy^2) + (x^2y - y^3)$

$$= x(x^2 - y^2) + y(x^2 - y^2)$$

$$= (x^2 - y^2)(x + y) = (x + y)(x - y)(x + y)$$

$$= (x + y)^2(x - y)$$

Cách giải 3. Nhóm các số hạng 1 và 4, số hạng 2 và 3 lại, ta có :

Biểu thức ban đầu $= (x^3 - y^3) + (x^2y - xy^2)$.

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x - y)$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + xy)$$

$$= (x - y)(x + y)^2$$

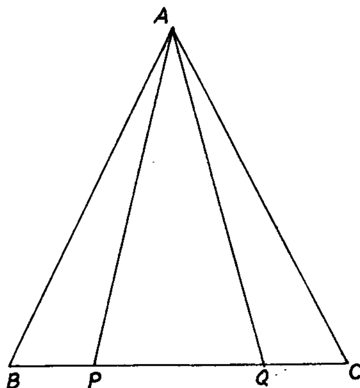
Cách giải 4. Ta quan sát thấy hai số hạng đầu và hai số hạng sau có đặc điểm đối xứng, dùng y hoặc $-y$ thay cho x thì giá trị của biểu thức bằng không, điều đó chứng tỏ $x = y$ hoặc $x = -y$ đều là nghiệm của đa thức, cho nên $(x + y)$, $(x - y)$ là thừa số của đa thức trên. Chia đa thức cho $(x + y)(x - y)$ thì ta sẽ được một thừa số nữa. Cụ thể là

$$\frac{x^3 + x^2y - xy^2 - y^3}{(x + y)(x - y)} = (x + y)$$

Do đó biểu thức cũ $= (x + y)^2(x - y)$

Cách giải 4 không nhóm các số hạng lại để phân tích mà dùng cách chia đa thức cho đơn thức là cách giải mới, độc đáo.

Ví dụ 3. Giả thiết P và Q là hai điểm cố định trên đoạn thẳng BC và BP = CQ. A là điểm di động ngoài BC (hình 21 - 15). Khi điểm A di động đến khiến cho $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$ thì tam giác ABC là tam giác gì ? Chứng minh kết luận của bạn (Đề thi cho học sinh cấp hai toàn Trung Quốc năm 1986).



Hình 21 - 15

Dễ biết được khi điểm A chuyển động đến khiến cho $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$ thì tam giác ABC là tam giác cân. Nhưng làm sao để chứng minh sự phán đoán đó ? Rất nhiều học sinh vò đầu nặn óc, mất gần một giờ mà vẫn làm không ra.

Có thật khó đến thế không ? Ta thử xét xem sao. Vì hai tam giác ABP và ACQ có đáy BP = CQ, cùng chiều cao nên diện tích của chúng bằng nhau. Góc $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$, ta nhớ đến tỉ số diện tích hai tam giác bằng tỉ số tích của hai cạnh ở hai bên góc bằng nhau.

Chứng minh 1. Trong tam giác BAP và CAQ, vì BP = QC và hai tam giác có chiều cao bằng nhau, nên $S_{BAP} = S_{CAQ}$, lại còn có $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$, cho nên

$$AB.AP = AC.AQ \qquad (1)$$

Tương tự $S_{BAQ} = S_{CAP}$ nên có

$$AB.AQ = AC.AP \qquad (2)$$

Nhân (1) với (2) được $AB^2 = AC^2$. Nên AB = AC, do đó tam giác ABC là tam giác cân.

Chứng minh 2. (Phép phản chứng). Giả thiết AB ≠ AC, ta giả thiết AB > AC thì $\hat{B} < \hat{C}$, $\widehat{QPA} < \widehat{AQP}$. Do đó AP > AQ (1)

Vì $$\frac{AP}{\sin B} = \frac{BP}{\sin \widehat{PAB}} = \frac{QC}{\sin QAC} = \frac{AQ}{\sin C}$$

Cho nên $\frac{AP}{AQ} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB}$.

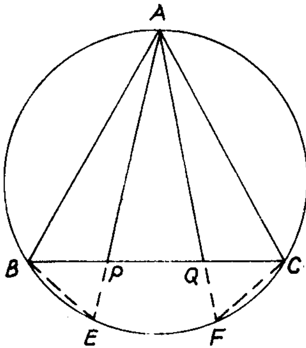
Từ đó mà có AP.AB = AQ.AC.

Vì AB > AC cho nên AP < AQ (2)

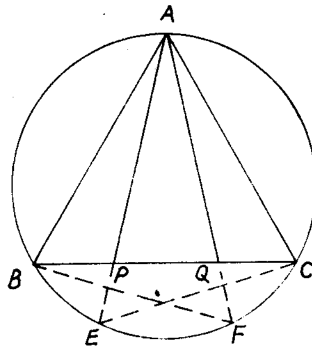
(1) và (2) mâu thuẫn nhau, cho nên AB = AC tức tam giác ABC là tam giác cân.

Chứng minh 3. Như trên hình 21 – 16, vẽ vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC, kéo dài AP, AQ phân biệt cắt đường tròn ở E và F. Nối BE và CF. Vì $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$ cho nên $\widehat{BE} = \widehat{CF}$, tức BE = CF, $\widehat{FBC} = \widehat{FCB}$. Lại vì BP = QC cho nên tam giác BEP = ΔCFQ, nên $\hat{E} = \hat{F}$.

Do đó AB = AC, vậy tam giác ABC là tam giác cân.



Hình 21–16



Hình 21–17

Chứng minh 4. Trên hình 21 - 17 vẽ vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC, kéo dài AP và AQ cắt đường tròn ở E và F. Nối CE và BF. Vì $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$, nên $\widehat{BCE} = \widehat{FBC}$, $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CF}$, nên $\widehat{BEF} = \widehat{EFC}$. Lại vì BP = QC, nên BQ = PC, ta có $\Delta BFQ = \Delta CEP$, $\widehat{BFQ} = \widehat{CEP}$ nên $\widehat{BFA} = \widehat{CEA}$ nên AB = AC, tam giác ABC là tam giác cân.

Chứng minh 5. Cho hình 21 - 18, vẽ AE // BC, BE // AP, nối QE. Dễ chứng minh được hai tứ giác EBPE, AEQC là hình bình hành.

. $\widehat{EBA} = \widehat{BAP} = \widehat{CAQ} = \widehat{AQE}$, nên A, E, B, Q là bốn điểm nằm chung trên đường tròn. Do đó $\widehat{ABC} = \hat{C}$.

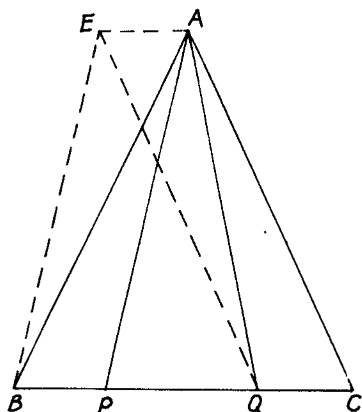
Nên AB = AC, tam giác ABC là tam giác cân.

Chứng minh 6. Tạo ra các tam giác tương tự, lợi dụng tính chất các tam giác tương tự có góc bằng nhau để chứng minh AB = AC.

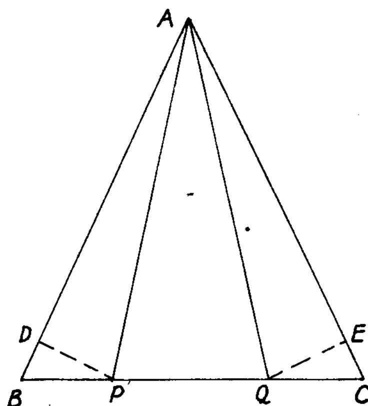
Như hình 21 - 19, qua các điểm P, Q ta vẽ các đoạn thẳng PD ⊥ AB ở D, QE ⊥ AC ở E.

Vì $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta AQC}$ cho nên AB.PD = AC.QE. Nên $\frac{AB}{AC} = \frac{QE}{PD}$,

lại vì $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$ cho nên $\Delta ADP = \Delta AEQ$, nên $\frac{QE}{PD} = \frac{AQ}{AP}$. Cho



Hình 21 - 18



Hình 21 - 19

nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AQ}{AP}$, vậy $\Delta BAQ \sim \Delta CAP$. Cho nên $\hat{B} = \hat{C}$. Được $AB = AC$, tam giác ABC là tam giác cân.

Chứng minh bất đẳng thức vừa là một trọng điểm của đại số cấp ba, vừa là vấn đề khó, rất nhiều học sinh lúng túng. Thực ra căn cứ yêu cầu độ khó của chương trình dạy ở trung học mà nói thì không phải là khó lắm đâu. Chỉ cần thành thạo trong việc nối thông được giữa dữ kiện và kết luận thì rất nhiều bài toán có thể tìm ra nhiều cách giải.

Ví dụ 4. Chứng minh $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Cách chứng minh 1. Phương pháp tổng hợp (cách co giãn).

Chú ý đến vế trái bất đẳng thức có n số hạng, vế phải chỉ một số hạng có thể biến đổi thành :

$$\sqrt{n} = \frac{n\sqrt{n}}{n} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{n số hạng.}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Cách chứng minh 2. Phương pháp tổng hợp (bất đẳng thức bình quân)

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\sqrt[n]{\frac{1}{1.\sqrt{2}\dots\sqrt{n}}} =$$

$$= n\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1.2\dots n}}} > n\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n^n}}} = n\,.\,n^{-1/2} = \sqrt{n}$$

Cách chứng minh 3. Phép quy nạp toán học.

Khi $n = 1$, vế trái bằng 1, vế phải bằng $\sqrt{1} = 1$, đẳng thức thành lập. Giả thiết khi $n = k$ đẳng thức vẫn thành lập, tức

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$ thì khi n = k = 1, có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} > \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}$$

Cho nên khi n = k + 1 đẳng thức thành lập, từ đó mà khi $n \in N$ đẳng thức thành lập.

Từ nhiều cách giải trên thấy rõ, những hướng suy nghĩ khác nhau trong giải đề đến với ta là do sự cảm thụ ban đầu của ta đối với các điều kiện đã cho rất khác nhau. Tương tự, đối với một nhóm điều kiện đã cho vì chúng có mối liên hệ với các định lí khác nhau nên trọng tâm của sự cảm thụ cũng khác nhau. Ví dụ, trong chứng minh 1 của ví dụ 3, từ điều kiện BP = QC, P, Q là hai điểm cố định trên đoạn BC, hai tam giác BAP và CAQ có chung đỉnh A nên ta cảm giác được các cặp tam giác BAP và CAQ, tam giác BAQ và CAP có diện tích bằng nhau. Còn trong chứng minh 3, từ điều kiện P, Q là hai điểm cố định trên đoạn BC, A là đỉnh chung của hai tam giác BAP và CAQ, $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$ nên ta cảm giác được tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn, $\widehat{BAP}$ và $\widehat{CAQ}$ là hai góc chắn những cung bằng nhau trên vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cảm giác khác nhau sẽ nảy ra một chuỗi liên tưởng khác nhau, dẫn đến những cách giải khác nhau.

Học được cách cảm thụ các điều kiện đã cho trên nhiều hướng khác nhau sẽ rất có lợi cho việc mở rộng hướng suy nghĩ. Song sự cảm thụ phong phú đó phải nhờ vào kiến thức phong phú. Cho nên muốn nâng cao tính tư duy linh hoạt đòi hỏi phải đặt nền móng kiến thức tốt, không ngừng tổng kết phương pháp và quy luật giải bài tập.

Bạn đọc có thể luyện với các đề dưới đây :

A. THAY ĐỔI PHƯƠNG PHÁP DIỄN ĐẠT

1) Nếu ab = 0 thì trong a, b tối thiểu có một số bằng không.

2) Giáp đến sớm hơn Ất nửa giờ.

3) a ≠ 0, b ≠ 0.

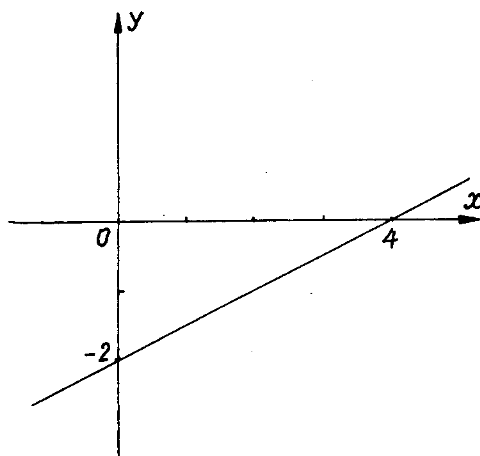
4) Ba điểm A, B, C chung đường thẳng (tức ba điểm A, B, C nằm trên cùng đường thẳng).

5) Biết P là điểm trên đường thẳng l, nó cách điểm A nằm ngoài đường thẳng là 10, góc làm thành bởi đoạn PA và đường thẳng l là 60°. Tìm trên l một điểm M sao cho khoảng cách từ nó đến A ngắn nhất.

6) Nếu đồ thị của hàm số bậc hai $y = Kx^2 + (K - 3)x + 1$ cắt trục x tối thiểu một điểm ở bên phải gốc tọa độ, thử tìm phạm vi của tham số K.

B. VIẾT CÁC LOẠI DIỀU KIỆN CÓ THỂ :

1) Đồ thị hàm số bậc nhất y = Kx + b như hình 21 - 20, căn cứ các điều kiện đã cho, bạn có thể nêu ra những kết luận gì ?



hình 21–20

2) Viết điều kiện đủ cho 4 điểm cùng nằm trên một đường tròn.

3) Viết điều kiện đủ cho hai tam giác có diện tích bằng nhau.

iiii) Thạo về nghĩ lật ngược lại. Trong một bình đựng cả dầu thơm và dấm. Vì tỉ trọng của dầu thơm nhỏ hơn dấm nên dầu thơm nổi trên mặt dấm. Bây giờ muốn lấy dấm ra trước, hỏi phải làm thế nào ?

Rõ ràng, cách nghĩ theo thói quen là cứ thế mà đổ và như thế chỉ đổ được dầu thơm ra trước. Có người nghĩ ra cách rất hay : dùng nút nút chặt miệng bình lại, lật ngược bình lại, kết quả dấm

xuống dưới, dầu thơm nổi lên trên. Chờ một lúc rồi mở dần nút ra, dấm sẽ ra trước. Cách nghĩ này hay quá ! Nó hay là ở chỗ "lật ngược lại", tức nghĩ theo hướng ngược lại. Nghĩ ngược lại có thể giúp ta mở ra bầu trời mới.

Muốn làm cho mình nghĩ ngược trở lại một cách tự nhiên, nên thường xuyên bồi dưỡng và rèn luyện một cách có ý thức.

Trong toán có rất nhiều vấn đề đảo ngược lại.

Ví dụ, mỗi lần học định lí, quy tắc hoặc công thức mới đều thử nghĩ xem mệnh đề ngược của nó là gì ? Mệnh đề ngược có đúng hay không ? Học xong luật phân phối của phép nhân $a(b + c) = ab + ac$ dễ biết được mệnh đề ngược của nó là $ab + ac = a(b + c)$. Mệnh đề ngược này cũng đúng. Nhưng tổng các đại lượng bằng nhau sẽ bằng nhau, tức $a = b$, $c = d$ thì $a + c = b + d$. Mệnh đề ngược của nó là : "nếu $a + c = b + d$ thì $a = b$, $c = d$" rõ ràng không thành lập. Chỉ cần cử một ví dụ ngược là sẽ thấy rõ điều đó. Lấy $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, $d = -4$. Mặc dù có $1 + (-3) = 2 + (-4)$ nhưng $1 \neq 2$, $-3 \neq -4$.

Dùng ngược công thức để giải là ví dụ điển hình của cách nghĩ ngược lại. Ví dụ công thức hóa trong giải các đề phân tích thành thừa số. Trong tam giác lượng, cách dùng ngược công thức được sử dụng rộng rãi, như công thức cộng góc.

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

Cách viết ngược là : $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha + \beta)$

2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Cách viết ngược là $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$

3) $\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\text{tg}\beta}$

Cách viết ngược là $\dfrac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\text{tg}\beta} = \text{tg}(\alpha + \beta)$.

Trong sách giáo khoa có rất nhiều vấn đề dùng công thức cộng góc viết ngược. Tiện đây cử vài ví dụ.

Ví dụ 1. Không tra bảng, tìm giá trị các phép tính sau :

1) $\sin 14^o \cos 16^o + \sin 16^o \cos 14^o$

2) $\cos(36^o + x)\cos(54^o - x) - \sin(36^o + x)\sin(54^o - x)$

3) $\dfrac{tg12^o + tg33^o}{1 - tg12^o tg33^o}$ 4) $\dfrac{1 - tg15^o}{1 + tg15^o}$.

Ví dụ 2. Chứng minh

$$\frac{tg^2x - tg^2y}{1 - tg^2x tg^2y} = tg(x + y)tg(x - y)$$

Đó là những ví dụ rất rõ về dùng ngược công thức cộng góc. Đề nghị độc giả tự giải.

Ví dụ 3. Đơn giản biểu thức $\sin 50^o(1 + \sqrt{3}\, tg10^o)$. Phân tích : trong biểu thức có $\sin 50^o$ và $tg10^o$, ta viết tg dưới dạng sin/cos rồi triển khai ra.

$$\sin 50^o(1 + \sqrt{3}\, tg10^o) = \sin 50^o \left(1 + \frac{\sqrt{3}\sin 10^o}{\cos 10^o}\right) \quad (1)$$

$$= \sin 50^o \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^o + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^o\right)}{\cos 10^o} \quad (2)$$

$$= 2\sin 50^o . \frac{\sin 30^o \cos 10^o + \cos 30^o \sin 10^o}{\cos 10^o} \quad (3)$$

$$= 2\cos 40^o \frac{\sin 40^o}{\cos 10^o} = \frac{\sin 80^o}{\cos 10^o} = \frac{\cos 10^o}{\cos 10^o} = 1. \quad (4)$$

Trong quá trình giải ở trên, dễ nhận ra rằng, từ bước (2) sang bước (3) ở vế phải xuất hiện công thức cộng sin, như vậy dùng

ngược công thức cộng sin của góc sẽ làm cho phép tính đơn giản đi.

Các dãy tính, quy tắc và công thức đều xuất hiện dưới dạng đẳng thức. Mệnh đề ngược của chúng đều là mệnh đề thật. Ví dụ cách bỏ dấu ngoặc và thêm dấu ngoặc vào là một cặp mệnh đề thuận ngược thật. Phép tính lũy thừa $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($a \geqslant 0$, m, n là số nguyên dương) với $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ đều là thật. Phép tính log $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ ($a > 0$ và $a \neq 1$, M, N > 0).

Với $\log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$ ($a > 0$ và $a \neq 1$, M, n > 0) đều là thật. Công thức diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}ah$ và $\frac{1}{2}ah = S$ đều là thật.

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$ và $\frac{1}{2}ab\sin C = S$ đều là thật. Hiểu được quy tắc các phép tính, các quy tắc và công thức đều có tính đối xứng, ta sẽ yên tâm mạnh dạn áp dụng mệnh đề ngược của chúng để giải toán.

Dưới đây cử ví dụ áp dụng ngược công thức hiệu của hai số nghịch đảo $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ mà trong thực tế rất hay dùng.

Cho biết a, b, c là các số thực khác nhau. Chứng minh :

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

Đối với đề này nếu dùng cách hòa đồng mẫu số vế trái để chứng minh thì quá trình tính rất phức tạp. Có cách gì ngắn gọn không ? Quan sát các số hạng ở vế trái ta thấy tử số vừa đúng bằng hiệu của hai thừa số của mẫu số : $b - c = (a - c) - (a - b)$; $(c - a) = (b - a) - (b - c)$; $a - b = (c - b) - (c - a)$. Điều đó

gợi ta nhớ đến dùng ngược công thức $\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ tức

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}.$$

Do đó $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} =$

$$= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} =$$

$$= \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} =$$

$$= \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

Dùng ngược công thức, quy tắc, các phép tính có thể làm cho quá trình giải nhanh, đơn giản, cho nên phải tăng cường tập dùng ngược, từ không biết đến biết, từ chưa thành thạo đến thành thạo.

Ngược lại ngoài việc muốn dùng ngược các quy tắc phép tính, công thức, quy tắc và định lí ra còn phải biết dùng cách suy ngược hoặc từ mặt trái của điều cần chứng minh để giải bài tập.

Có một số đề toán, quan hệ khá phức tạp, từ điều kiện đã biết trực tiếp bắt tay vào giải, có lúc giữa đường sẽ mất phương hướng. Trong trường hợp đó, nếu kết hợp với phương pháp phân tích, từ kết luận mà xuất phát, cứ từng bước truy ngược thường sẽ tìm ra được con đường hợp lí để giải.

Ví dụ : 100 người sắp thành một hàng, điểm danh bắt đầu từ 1, cứ người số lẻ bước ra khỏi hàng, những người số chẵn ở lại và lại báo số từ đầu. Cứ thế tiếp tục, cuối cùng còn lại một người. Hỏi người đó trong lần báo số đầu tiên là số mấy ?

Đối với đề này, nếu cứ suy từng bước từ lần báo số đầu tiên đến lần cuối cùng thì trong 100 người phải loại bỏ những người số 1, 3, 5... 99, sau đó lại tiếp tục theo quy luật đó. Rõ ràng quá

trình tư duy rất phức tạp. Nếu dùng phép suy ngược, cách giải sẽ nhanh gọn. Ta nghĩ như sau : Người còn lại cuối cùng, nhất định là người lần nào cũng báo số chẵn, nên số báo danh lần đầu của người đó phải là kết quả của một số lũy thừa cơ số 2, mà $2^8 = 64$, $2^9 = 128$, cho nên số báo lần đầu của người đó là 64.

Ví dụ khác, trong tam giác ABC, $\hat{B} = 60^o$. Chứng minh :

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}. \qquad (1)$$

trong đó a, b, c lần lượt là cạnh đối diện với các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Phân tích : Muốn cho (1) thành lập, cần có

$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} - \frac{3}{a+b+c} = 0$. Vì

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} - \frac{3}{a+b+c} = \frac{(b+c)(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(a+b+c)} + \frac{(a+b)(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(a+b+c)}$$

$$- \frac{3(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(a+b+c)} = \frac{a^2+c^2-ac-b^2}{(a+b)(b+c)(a+b+c)}$$ và $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

Cho nên $a^2 + c^2 - ac - b^2 = 0$ tức phải có $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ (2) thành lập.

Đẳng thức (2) phản ánh quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ABC, nhớ đến định lý cosin và chú ý đến điều kiện $\hat{B} = 60^o$, đẳng thức (2) nhất định thành lập. Nghĩ ngược lại làm cho ta rất nhanh tìm thấy hướng giải.

Đối với những đề dùng phép suy ngược cũng không có kết quả còn có thể bắt đầu từ mặt trái của kết luận để giải. Ở đây chia làm hai trường hợp :

Thứ nhất là giả thiết điều cần chứng minh không tồn tại, sau đó tìm ra mâu thuẫn, từ đó mà chứng tỏ điều cần chứng minh tồn tại (tức dùng phép phản chứng). Thứ hai, nếu từ chính diện

giải rất phức tạp thì chuyển sang xét mặt trái của điều cần chứng minh, từ đó tìm được lời giải chính diện.

Dưới đây cử ví dụ giải theo trường hợp thứ hai.

Nếu trong ba phương trình sau, tối thiểu có một phương trình có nghiệm số thực, hãy tìm phạm vi số thực a đó.

$$x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 2ax - 2a = 0 \quad (3)$$

Đề này, nếu từ chính diện "tối thiểu có một phương trình có nghiệm số thực" để giải, thì phải lần lượt thảo luận ba trường hợp của các phương trình (1), (2), (3).

Như thế sẽ rất phức tạp. Bây giờ xét mặt trái của nó, giả thiết cả ba phương trình đều không có nghiệm số thực, lúc đó phạm vi giá trị lấy a sẽ là gì ?

$$\text{Từ } \begin{cases} \Delta_1 = 16a^2 + 4(4a - 3) < 0 \\ \Delta_2 = (a - 1)^2 - 4a^2 < 0 \\ \Delta_3 = 4a^2 + 8a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2} \\ a < -1 \text{ hoặc } a > \frac{1}{3} \\ -2 < a < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} < a < -1$. Đó là điều kiện 3 phương trình không có nghiệm số thực.

Cho nên, khi $a \leqslant -\frac{3}{2}$ hoặc $a \geqslant -1$ thì trong ba phương trình, tối thiểu có một phương trình có nghiệm số thực.

Có một số đề toán, xem có vẻ giống nhau, nhưng thực tế là hai loại vấn đề trái ngược nhau. Giải những loại đề như thế đòi hỏi hướng của tư duy phải nhanh chóng chuyển từ chính diện sang phản diện.

Ví dụ với hai đề đại số sau.

1. A và B cách nhau S km, bạn Hồng đi và về giữa hai địa điểm đó, khi đi mất a giờ, khi về mất b giờ. Tìm tốc độ bình quân đi về.

2. A và B cách nhau S km, bạn Hồng đi về giữa hai địa điểm đó, khi đi với tốc độ a km/h, về với tốc độ b km/h. Tìm tốc độ bình quân.

Bề ngoài, cả hai bài toán đề có ba đại lượng S, a, b, giống như chẳng khác gì nhau. Thực chất là hai vấn đề trái ngược nhau. Các đại lượng a, b trong hai đề rất khác nhau.

Trong đề 1, a, b biểu thị thời gian, còn trong đề 2 là tốc độ.

$a = \dfrac{\text{Quãng đường}}{\text{thời gian}}$, nó khác với nghĩa của a trong đề 1. Một đề đã biết thời gian đi về, đề thứ hai biết tốc độ đi về, quan hệ ngược nhau. Tất nhiên biểu thức đại số của chúng khác nhau. Tốc độ bình quân là $\dfrac{2S}{a+b}$. Đề thứ hai tốc độ bình quân là $\dfrac{2S}{\dfrac{S}{a}+\dfrac{S}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$. Ví dụ khác "Tìm cực trị của hàm số $y = x^2 - 6x + 10$". Đề khác : "Nếu khi $x = -1$, hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có cực trị -8 và đồ thị cắt trục y ở B(0, –6), tìm dạng hàm số bậc hai".

Trên đây cũng là hai vấn đề tương phản nhau.

Ngoài ra, một đề toán riêng lẻ cũng thường có hai vấn đề quan hệ trái ngược nhau. Điều đó đòi hỏi dùng thuận và dùng ngược công thức để giải. Ví dụ giải đề sau.

Trong tam giác ABC, $\hat{B} = 120^o$, AB = 3cm, BC = 5cm. Tìm 1) AC ? 2) Diện tích tam giác ABC ; 3) Trị của sinA + sinC.

Ta phân tích hướng suy nghĩ.

Tìm AC $\Leftarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos B}$.

Tìm $S_{ABC} \Leftarrow S = \frac{1}{2}AB.BC\sin B$ (biết 2 cạnh và góc kẹp giữa, tìm diện tích)

$$\text{Tìm } \sin A + \sin C \Leftarrow \begin{cases} \sin A = \dfrac{2S_{ABC}}{AC.AB} \\ \sin C = \dfrac{2S_{ABC}}{AC.BC}. \end{cases}$$

(đã biết diện tích tam giác và hai cạnh, tìm sin góc kẹp giữa hai cạnh).

Rất rõ ràng, câu hỏi thứ hai và thứ ba là hai vấn đề ngược nhau. Mời các bạn tự giải. (Đáp số : AC = 7cm, $S_{ABC} = \frac{15}{4}\sqrt{3}$ cm^2, $\sin A + \sin C = \frac{4}{7}\sqrt{3}$). Còn có cách giải khác không ? Bạn có biết giải theo cách dùng định lí sin và tính chất tỉ lệ không ?

21 - BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TƯỞNG TƯỢNG KHÔNG GIAN

Năng lực tưởng tượng không gian là chỉ khả năng dùng hình vẽ không gian để phản ánh và nắm vững các tính chất (hình dạng, độ lớn và vị trí) và quan hệ không gian của vật thể. Nó bao gồm :

1) Phân tích một cách chính xác quan hệ về số lượng và vị trí giữa các nguyên tố cơ bản trong.những hình khối cơ bản.

2) Đối với vật thực, có thể xem hình vẽ để phán đoán và phân tích chính xác hình dạng và quan hệ vị trí không gian của nó và có thể dời hình trong không gian một cách chính xác bằng phương pháp tịnh tiến, quay, đối xứng và cắt bổ vật thể ra.

3) Điền các chữ, kí hiệu hoặc chú thích vào các hình đã dời đi một cách chính xác, tức có thể dựa vào nội dung lời văn diễn đạt của bài toán để vẽ ra hình vẽ tương ứng. Ngược lại, khi đọc được các số liệu, quan hệ hình học trên hình vẽ có thể dùng ngôn ngữ toán học diễn tả lại một cách chính xác.

Năng lực tưởng tượng không gian là một trong những năng lực toán học cơ bản. Trong toán chủ yếu thông qua hai môn hình học phẳng, hình học lập thể để bồi dưỡng năng lực hình học. Ngoài ra việc học hàm số trong đại số và học hình học giải tích cũng có tác dụng nhất định trong việc bồi dưỡng năng lực tưởng tượng không gian.

Cần phải nói rằng, ở các năm cuối bậc tiểu học, đa số học sinh đã sơ bộ có khái niệm về không gian. Vì mỗi người chúng ta đều sống trong không gian ba chiều nên đã xây dựng nên mối quan hệ tương ứng giữa vật thể không gian và hình vẽ lập thể trên mặt phẳng. Tất nhiên, loại tưởng tượng không gian này mới chỉ là một hình ảnh đối với tổng thể chứ chưa phải từ quan hệ giữa các nguyên tố hình học để hiểu chúng.

Bồi dưỡng năng lực tưởng tượng không gian là cả một quá trình nâng cao "từng cấp".

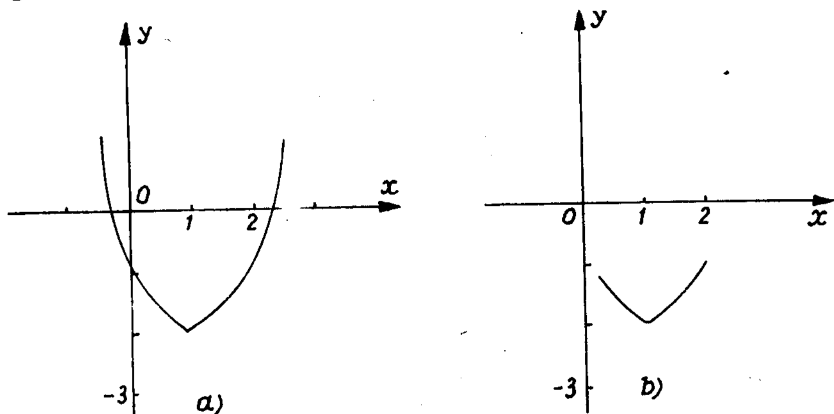
Cấp thứ nhất là quan sát sự vật, mô hình, v.v... để hình thành một hình ảnh chung về quan niệm không gian trong đầu óc, và tiến lên một bước trừu tượng thành hình học không gian chỉ do các điểm và đường thẳng nối lại với nhau mà thành.

Cấp thứ hai. Qua vẽ hình (hình trực quan, hình phác thảo) làm cho đầu óc hình thành hình ảnh cụ thể khái niệm không gian. Vẽ hình phải dựa vào phương pháp và quy tắc nhất định, hình vẽ ra phải "đạt yêu cầu".

Như vẽ đồ thị hàm số, thứ nhất đường cong phải trơn tru, thứ hai phải làm nổi bật tính chất đặc trưng.

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x - 2$.

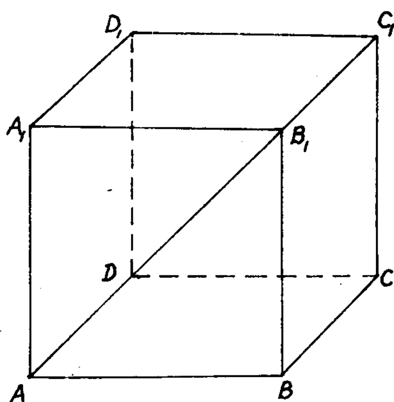
Có học sinh vẽ đường cong ở vị trí đỉnh parabol thành hình nhọn hoặc không vẽ giao điểm của nó với các trục x, y. Điều đó không đạt (hình 22-1 a, b).



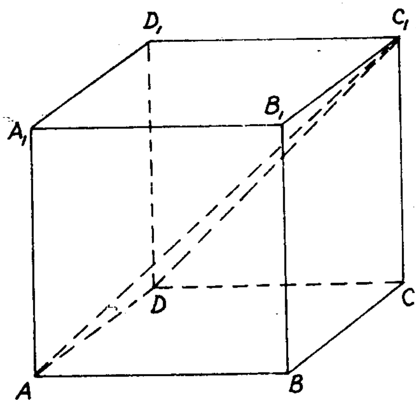
Hình 22-1

Hoặc vẽ hình lập thể nên vẽ được vị trí của đường thẳng và mặt phẳng chính xác, hình đẹp, rõ, các đường thẳng và mặt phẳng thấy được nhiều.

Ví dụ 2. Vẽ đường chéo AC_1 của khối lập phương $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$.



Hình 22-2

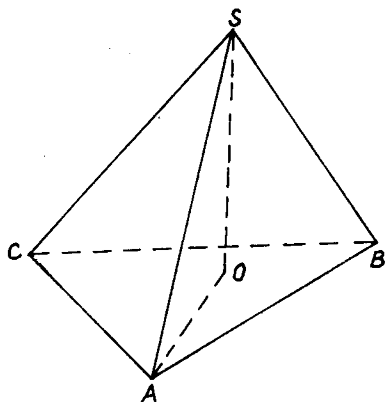


Hình 22-3

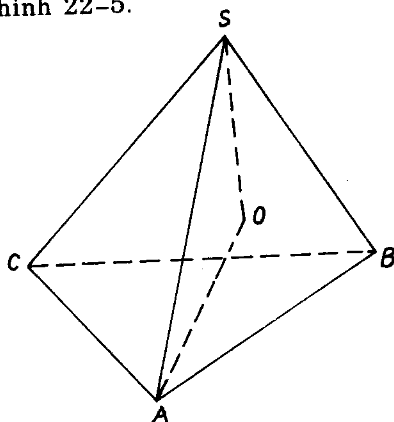
Có học sinh vẽ các điểm đỉnh A, D, B_1, C_1 trên cùng một đường thẳng kết quả làm cho đường chéo AC_1 trùng với đường chéo mặt sau DC_1 (hình 22-2). Như vậy nhìn không ra đó là hai đường thẳng khác mặt phẳng, gây khó khăn cho sự phân tích khi giải. Cách vẽ đúng như trên hình 22-3.

Ví dụ 3. Giả thiết 3 cạnh bên của hình chóp nón S-ABC đều làm với đáy góc 75^o. Đáy ABC là tam giác cân và $\widehat{BAC} = 150^o$. Diện tích mặt cắt đi qua điểm A, cạnh bên và đường cao SO là $7cm^2$. Tìm thể tích hình chóp.

Có một số học sinh vẽ chân đường cao O vào trong tam giác ABC (hình 22-4). Đó là sai lầm, vì sao ? Vì các cạnh bên SA, SB, SC đều làm với đáy góc 75^o nên SA = SB = SC, dễ nhận biết rằng chân O phải ở ngoài tâm của tam giác ABC, lại còn biết $\widehat{BAC} = 150^o$ là góc tù nên điểm O nhất thiết phải ở ngoài tam giác ABC. Cách vẽ đúng như trên hình 22-5.



Hình 22-4



Hình 22-5

Còn có thể luyện tập qua hình vẽ thêm để bồi dưỡng khả năng tưởng tượng không gian. Ví dụ ở hình trên vẽ thêm góc phẳng nhị diện do hai mặt bên SAC và SAB tạo thành.

Cấp thứ ba : Kết hợp hình vẽ hay đồ thị, vận dụng suy lí hiểu sâu hơn và nắm vững kết cấu bên trong và tính chất của các dạng

không gian. Tức là phải vận dụng phương pháp suy lí để nắm vững tính chất của các tầng sâu hơn trong kết cấu của hình không gian, chứ không phải chỉ dựa vào quan sát để tìm trên hình những tính chất ở bề ngoài. Cần nói rằng, đó là mấu chốt để bồi dưỡng năng lực tưởng tượng không gian. Nói cho đến cùng, hạt nhân của năng lực tưởng tượng không gian vẫn là năng lực tư duy. Do đó phải chú trọng học tập các khái niệm và các tính chất cơ bản của hình vẽ không gian. Chỉ có như thế mới bồi dưỡng được năng lực tưởng tượng không gian một cách cơ bản.

Cấp thứ tư cũng là cấp cao nhất : có thể chuyển các số liệu, công thức thành các quan hệ hình không gian một cách thoải mái, thành thạo. Đó là cái mà ta thường gọi là vận dụng phương pháp kết hợp số với hình.

22 - CHÚ Ý PHÁN ĐOÁN, HỌC CÁCH PHÁN ĐOÁN

Phán đoán là một phương pháp tư tưởng được ứng dụng rộng rãi trong nghiên cứu khoa học. Đó là căn cứ các nguyên lí và sự thật đã biết để nêu lên những giả định về các hiện tượng và quy luật chưa biết.

Những giả định có tính luận đề như thế đúng hay sai còn phải qua kiểm nghiệm hoặc chứng minh mới có thể khẳng định được. Phán đoán có vai trò thúc đẩy quan trọng đối với sự phát triển của toán học. Trong dòng sông phát triển hàng mấy ngàn năm của toán học, các nhà toán học đã không ngừng đưa ra những phán đoán và chứng minh chúng. Có một số phán đoán cho đến tận giờ vẫn chưa được chứng minh như "các bài toán Fecma" (1742).

Phán đoán là sự nhảy vọt từ dữ kiện sang kết luận. Phương thức tư duy này trong học toán cũng vô cùng quan trọng. Nó

không những giúp ta phát hiện sự thật mới mà trong giải bài tập còn giảm được những cách giải mầy mò, mù quáng, trước những đề khó không vội đi vào tính toán, chứng minh ngay mà biết căn cứ vào dữ kiện và mục tiêu cần giải quyết để có những trù liệu, phán đoán. Nó thuộc loại vấn đề gì ? Đại thể nên bắt đầu từ đâu ? Sau đó mới bắt tay vào chứng minh, tính toán. Khi đạt được một phần kết quả nào đó thì kết hợp với mục tiêu để phán đoán, cảm nhận được cách giải nào sẽ đạt được kết quả. Nếu thấy có thể được thì sẽ tiếp tục phương pháp đó, nếu cảm thấy không được thì phải quay về điều kiện ban đầu để phán đoán tìm cách giải khác, điều chỉnh mãi cho đến khi giải được mới thôi. Từ đó có thể thấy, phán đoán không những đi đến phát hiện và sáng tạo mà còn đi đến thành công. Cho nên ta phải rất coi trọng phán đoán.

Vậy làm sao để học được phán đoán.

1. Qua quan sát đưa ra phán đoán. Quan sát đặc điểm kết cấu số hoặc hình cộng thêm với liên tưởng, từ đó đưa ra sự phán đoán cách giải quyết vấn đề hoặc phán đoán ra quy luật.

Ví dụ 1. Phân tích thành thừa số $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Đây là biểu thức bậc ba. Liên hệ với biểu thức bậc hai trước đây xem có thể áp dụng công thức lập phương để phân tích thành thừa số không ? Phán đoán là được, thử xem.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = x^3 + 3xy(x + y) + y^3 + z^3 - 3xyz - 3xy(x + y)$$

$$= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z)$$

(Quan sát kết cấu của biểu thức, có dạng lập phương một tổng)

$$= (x + y + z)[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2] - 3xy(x + y + z)$$

$$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy)$$

(kết quả đã sáng sủa)

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz).$$

Thực tế chứng minh sự phán đoán đó đúng. Kết quả của phân tích thừa số ở trên có thể dẫn đến một số kết quả rất thú vị, nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

Ví dụ 2. Chứng minh $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{1}{4}n\pi$.

Quan sát đẳng thức, ta thấy vế trái là tổng của một số tổ hợp âm dương, vế phải là tích của $2^{\frac{n}{2}}$ với hàm số cos. Nhớ đến các định lí nhị thức, ta phán đoán : đẳng thức cần chứng minh có thể là dạng triển khai đại số của $(1 + i)^n$ và dạng triển khai hàm số lượng giác rồi so sánh số thực mà tìm ra kết quả. Bạn thử xem.

17	16	15	14	13	30
18	5	4	3	12	29
19	6	1	2	11	28
20	7	8	9	10	27
21	22	23	24	25	26

Ví dụ 3. Lấy từ 1, 2, 3, ... 30 sắp thành hình dạng xoáy ốc ngược chiều kim đồng hồ như hình vẽ. Qua hình vẽ bạn có phát hiện thấy vị trí sắp xếp của các số nguyên tố có đặc tính gì không ?

Viết ra toàn bộ các số nguyên tố từ 1 đến 30 ta phát hiện thấy những số nguyên tố này đều sắp xếp thành hình đường thẳng. Từ đó ta phán đoán : sắp xếp các số tự nhiên từ 1, 2, 3... theo hình xoáy ốc ngược chiều kim đồng hồ thì các số nguyên tố đều sắp xếp trên đường thẳng.

Phát hiện này đầu tiên là do nhà bác học Mỹ S. Uylam nêu ra, ông đã dùng máy tính sắp xếp từ 1 đến số 65000 theo xoáy ốc ngược chiều kim đồng hồ và in ra, phát hiện những số nguyên tố này vẫn có đặc tính trên. Hiện tượng này về sau trong toán học gọi là "Hiện tượng Uylam". Về sau các nhà toán học từ trong "Hiện tượng Uylam" tìm ra khá nhiều tính chất thú vị của số nguyên tố.

2. Qua thực nghiệm, đưa ra sự phán đoán

Qua phân tích quá trình một số lần biến đổi hữu hạn, ta quy nạp và đưa ra phán đoán :

Ví dụ 1. Tìm chữ số cuối cùng của 3^{1992} ?

3^{1992} là một số rất lớn, ta không thể trong chốc lát tìm ra được kết quả cuối cùng để xác định số cuối. Vì thế ta đoán chữ số cuối của 3^n (n là số tự nhiên) có thể theo một quy luật nào đó. Do đó ta lập bảng đối với n = 1, 2, 3...

n	Chữ số cuối của 3^n
1	3
2	9
3	7
4	1
5	3
6	9
.	.
.	.
.	.

Qua thí nghiệm 6 số đầu, ta đưa ra phán đoán : chữ số cuối của 3^n lấy chu kì 4 số xuất hiện, tức chữ số cuối của 3^{4k+1} là 3, chữ số cuối của 3^{4k+2} là 9, của 3^{4k+3} là 7, của 3^{4k} là 1.

Ta có thể dùng phép quy nạp của toán học để chứng minh tính đúng đắn của kết luận này.

Do đó vấn đề trở thành đổi 1992 ra dạng 4k + r, tìm r.

Ví $3^{1992} = 3^{4 \times 498}$, nên số cuối của 3^{1992} là 1.

Ví dụ 2. Có hai thùng A, B dung tích bằng nhau. Thùng A đựng đầy nước, thùng B là thùng không. Đầu tiên đổ $\frac{1}{2}$ số nước từ thùng A sang thùng B, rồi lấy $\frac{1}{3}$ số nước trong thùng B trút trở lại thùng A, lại trút $\frac{1}{4}$ số nước từ thùng A sang thùng B, rồi trút $\frac{1}{5}$ từ B sang A... Cứ thế tiếp tục, sau 1993 lần đổ, hỏi mỗi thùng có bao nhiêu nước ? Và sau 2000 lần mỗi thùng có bao nhiêu ?

Đầu tiên ta làm thí nghiệm một số lần đổ đầu tiên để tìm quy luật.

Số lần đổ	1	2	3	4	5	6	7	.....
Nước của thùng A	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$	.....
Nước của thùng B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	.....

Quan sát các số trong bảng, ta đưa ra sự phán đoán sau : sau khi đổ 2k – 1 lần, nước trong hai thùng bằng nhau, mỗi thùng đều có $\frac{1}{2}$; sau 2k lần đổ, nước trong thùng A là $\frac{k+1}{2k+1}$, nước trong thùng B là $\frac{k}{k+1}$. Có thể dùng phép quy nạp toán học để chứng minh kết luận này.

Ví dụ 3. Tìm $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.

Dùng một phần phép quy nạp để khảo sát không phát hiện quy luật được ngay. Nhưng nếu phân tích mẫu số, ta có thể nhìn ra quy luật

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{3+4}{3 \times 4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}.$$

Do đó ta đoán $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \quad + \frac{1}{2n}$.

Bạn đọc tự chứng minh kết luận này.

3. Qua phân loại so sánh đưa ra phán đoán

Căn cứ một số mặt nào đó của hai sự vật tương tự hoặc giống nhau để phán đoán những mặt khác của chúng cũng có thể tương

tự hoặc giống nhau. Phân loại so sánh để phán đoán có hai loại : so sánh hình thức và so sánh bản chất. Dưới đây nêu ví dụ phân loại so sánh hình thức để phán đoán.

Từ nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ và định lí Viet $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ để đoán phương trình bậc ba một ẩn số $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có kết luận tương tự không ? Tức là

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \; ; \; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Hay ví dụ phân loại so sánh các số nguyên tố để phán đoán : phân loại so sánh các tính chất cơ bản của phân thức để phán đoán tính chất cơ bản của phân thức.

Thử nghĩ xem, các phán đoán dưới đây thuộc loại phân loại so sánh nào ?

Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots \frac{a_n}{b_n}$ và $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$ thì

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots \frac{a_n}{b_n},$$ từ đó mà

phán đoán :

nếu $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \ldots < \frac{a_n}{b_n}$ và $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$ thì

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

Có thể chứng minh không mấy khó khăn : khi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ cùng dấu thì phán đoán ở trên là đúng.

4. Thông qua biến thành dạng chung hoặc dạng riêng để phán đoán

Đem một vấn đề đã biết biến thành dạng chung để phán đoán rút ra một kết luận chung mới hoặc đưa một vấn đề đặc biệt về dạng chung để phán đoán cách giải quyết vấn đề.

Ví dụ 1. Từ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, phán đoán $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + (2a_1a_2 + 2a_1a_3 + ... + 2a_1a_n) + (2a_2a_3 + 2a_2a_4 + + ... + 2a_2a_n) + ... + 2a_{n-1}a_n$.

Ví dụ 2. Giả thiết $x > 0$, $y > 0$ thì $(1 + x + x^2)(1 + y + y^2) \geqslant 9xy$.
Phán đoán 1. Đưa từng biến số về dạng chung, đưa ra phán đoán.

Giả thiết $x_i > 0$, $i = 1, 2, ... n$ thì

$$(1 + x_1 + x_1^2)(1 + x_2 + x_2^2) ... (1 + x_n + x_n^2) \geqslant 3^n x_1x_2... x_n$$

Phán đoán 2. Đưa số hạng hằng số 1 về một đại lượng chung rồi đưa ra phán đoán.

$$(a_1 + x_1 + x_1^2)(a_2 + x_2 + x_2^2) ... (a_n + x_n + x_n^2) \geqslant 3^n \sqrt[3]{a_1a_2... a_n} . x_1x_2... x_n$$

Phán đoán 3. Nếu đưa hằng số về dạng thì có :

$$(a_1 + b_1 + x_1 + x_1^2)(a_2 + b_2 + x_2 + x_2^2) ...$$

$$... (a_n + b_n + x_n + x_n^2) \geqslant 4^n \sqrt[4]{a_1... a_nb_1... b_n} . x_1x_2 ... x_n .$$

Các phán đoán trên đây đều đúng và còn có thể tiếp tục đưa về dạng chung. Xin giành cho bạn đọc làm tiếp.

5. Qua hiện tượng vật lí, đưa ra phán đoán

Có một số học sinh trên cơ sở hiện tượng vật lí gợi ý mà đưa ra phán đoán, như phản xạ và khúc xạ của ánh sáng để đưa ra phán đoán con đường ngắn nhất ; hoặc từ kết cấu của tổ ong để phán đoán hình lỗ ong sáu cạnh chắc tiết kiệm vật liệu nhất và từ trọng tâm vật lí để đoán trung tâm hình học, v.v...

23 - KHÔNG ĐƯỢC QUÊN MIỀN XÁC ĐỊNH

Mọi người đều biết, miền xác định là một yếu tố cơ bản trong khái niệm của hàm số. Khoảng giá trị, tính đơn điệu, tính chẵn lẻ, cực trị và đồ thị của hàm số đều lấy miền xác định làm điều kiện tiền đề để thảo luận. Đồng thời việc giải (hệ) phương trình và (hệ) bất đẳng thức cũng được tìm trong miền xác định chung. Trên một phạm vi rộng hơn mà nói, phàm những vấn đề có liên quan đến dùng chữ để biểu thị số, ta đều phải xét đến phạm vi cho phép lấy giá trị của chữ, nếu không thì sẽ phạm sai lầm. Dưới đây xét mấy ví dụ.

Ví dụ 1. Số nghiệm số thực của phương trình $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ là : (A) 4, (B) 3, (C) 2, (D) 1.

Có học sinh làm như sau :

Giải. Biến đổi phương trình thành $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1) hoặc $x^2 + 2x - 3 = 0$ (2).

Rõ ràng phương trình (1) có $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$ nên có hai nghiệm thực khác nhau. Phương trình (2) có $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$ cũng có hai nghiệm thực khác nhau. Cho nên phương trình đó có 4 nghiệm số thực khác nhau. Chọn (A) 4.

Cũng có học sinh làm như sau :

Giải. Biến đổi phương trình đã cho thành $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$.

Cho nên $|x| = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, nên $|x| = 3$, $|x| = -1$ (bỏ).

Do đó $x = \pm 3$ tức phương trình có hai nghiệm số thực khác nhau. Chọn (C) 2.

Hai cách giải trên nhất định có một cách sai. Rõ ràng cách giải đầu có vấn đề. Sai lầm ở ngay bước thứ nhất, biến đổi $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ thành $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1) và $x^2 + 2x - 3 = 0$ (2) với điều kiện gì ? Trong quá trình giải không nói rõ, như thế tạo nên nguy cơ tiềm ẩn : vì phương trình (1) chỉ "khi $x > 0$" mới cùng nghiệm với phương trình đã cho, còn phương trình (2) chỉ "khi $x < 0$" mới cùng nghiệm với phương trình đã cho. Như thế là đã bỏ qua phạm vi lấy giá trị của ẩn số hai phương trình (1) và (2), nên sẽ xuất hiện thêm nghiệm, gây ra sai. Nên sửa cách giải đầu lại như sau.

Khi $x > 0$ ta biến đổi phương trình đã cho thành $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).

Giải phương trình (1) được : $x = 3$, $x = -1$ (bỏ) nên $x = 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Khi $x < 0$, biến đổi phương trình đã cho thành $x^2 + 2x - 3 = 0$ (2). Giải phương trình (2) được $x = -3$, $x = 1$ (bỏ) nên $x = -3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm số thực khác nhau. Chọn (C) 2.

Thử nghĩ xem, không cần giải mà dùng định lí Viet có phải cũng có thể xác định được hai nghiệm số thực ?

Ví dụ 2 : Biết $\sin 2\alpha = m$, $\cos 2x = n$ thì trị của $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là :

$$(A)\ \frac{n}{1-m}\ ;\ (B)\ \frac{1+m}{n}\ ;\ (C)\ \frac{1+m+n}{1-m+n}\ ;\ (D)\ \frac{1+m-n}{m+n-1}.$$

Đề này có vẻ là đơn giản nhưng qua diễn toán học sinh lại có đủ cả bốn phương án chọn.

Cách giải 1. $$tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha} = \frac{1 + \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}{1 - \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$$

$$= \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{1+m+n}{1-m+n}.$$ Chọn (C).

Cách giải 2. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha} = \frac{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1 + \sin2\alpha}{\cos2\alpha} = \frac{1 + m}{n}$. Chọn (B)

Cách giải 3. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$

$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} = \frac{\cos2\alpha}{1 - \sin2\alpha} = \frac{n}{1 - m}$. Chọn (A).

Cách giải 4. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$

$= \frac{2\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha} = \frac{1 + \sin2\alpha - \cos2\alpha}{\sin2\alpha - 1 + \cos2\alpha} = \frac{1 + m - n}{m + n - 1}$. Chọn (D)

Vì sao một đề bài lại có những bốn đáp số mà quá trình giải hầu như rất khó phản bác. Ở đây có một vấn đề quan trọng là : hàm số lượng giác trong quá trình biến đổi phải giữ được miền xác định. Chúng ta dựa vào nguyên tắc đó để phân tích bốn cách giải.

Trong cách giải thứ nhất $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$: $\frac{\pi}{4} + \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ tức là $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$.

Trị số của α trong $\frac{1+m+n}{1-m+n}$, $1 - m + n \neq 0$ tức là $\sin2\alpha - \cos2\alpha \neq 1$, $\sqrt{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \neq 1$. Cho nên $\alpha \neq \frac{k}{2}\pi + (-1)^k\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}$ $(k \in Z)$

Trong cách giải 2, giá trị của n trong $\frac{1 + m}{n}$ là $n \neq 0$ tức $\cos2\alpha \neq 0$. Nên $\alpha \neq k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$.

Cách giải 3, trong $\frac{n}{1-m}$ thì giá trị $1 - m \neq 0$, tức $\sin 2\alpha \neq 1$.

Nên $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$

Cách giải 4, trong $\frac{1+m-n}{m+n-1}$ giá trị của $m + n \neq 1$ tức $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \neq 1$.

Nên $\alpha \neq \frac{k}{2}\pi + (-1)^k\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}$ $(k \in Z)$. So sánh các miền giá trị của bốn cách giải với miền xác định của biểu thức ban đầu ta thấy chỉ có cách giải ba trước và sau khi biến đổi miền giá trị vẫn giữ được nên chỉ có cách giải ba là chính xác. Do đó chọn (A). Ba cách giải khác trong quá trình diễn toán đã mở rộng hoặc thu hẹp miền xác định nên đáp số sai.

Từ cách giải sai của đề trên, ta thấy có hai loại sai lầm thường gặp do coi nhẹ miền xác định là, thứ nhất xem nhẹ vai trò trực tiếp của miền xác định (ví dụ 1). Loại thứ hai là coi thường vai trò gián tiếp của miền xác định (ví dụ 2). Loại sai thứ nhất tương đối rõ, loại sai thứ hai lấp láp hơn, khó thấy. Song cho dù loại nào thì nguyên nhân sản sinh đều như nhau, đó là : trong đầu không có miền xác định. Do đó muốn tránh được sai sót đầu tiên phải hiểu sâu sắc vai trò ràng buộc của miền xác định trong giải các bài toán, thứ hai phải thực sự có nền tảng kiến thức vững chắc, nhất là làm rõ điều kiện áp dụng của các công thức, qui tắc ; thứ ba phải xác lập cho mình một tư duy mạnh mẽ về miền xác định, tức là hình thành thói quen tư duy "hễ thấy đề có tham số bằng chữ là nghĩ ngay đến miền xác định".

Dưới đây là một đề về log, thử xem cách giải có đúng không

Giải phương trình $\log_{0,5x}x^2 - 14\log_{16x}x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$ (1)

Giải. Ta biến đổi như sau :

$$\frac{2}{\log_x 0,5x} - \frac{42}{\log_x 16x} + \frac{20}{\log_x 4x} = 0 \qquad (2)$$

Hòa đồng mẫu số được :

$$\log_x 16x\log_x 4x - 21\log_x 0,5x.\ \log_x 4x + 10\log_x 0,5x.\ \log_x 16x = 0$$

Chỉnh lí được $2(\log_x 2)^2 + 3\log_x 2 - 2 = 0$.

Giải được $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ hoặc $\log_x 2 = -2$.

Nên $x = 4$ hoặc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Phân tích. Rõ ràng $x = 1$ là một nghiệm của phương trình. Do đó cách giải có vấn đề. Sai sót xảy ra ở bước (1) sang bước (2). Sự biến đổi này là dùng công thức thay cơ số log : $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. Điều kiện để đẳng thức này được thành lập là $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$ và $b \neq 1$. Cho nên khi $\log_{0,5x} x^2 = \frac{2}{\log_x 0,5x}$, $\log_{16x} x^3 = \frac{3}{\log_x 16x}$ và $\log_{4x}\sqrt{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\log_x 4x}$ thì vô hình trung đã thu hẹp miền xác định : $x > 0$ và $x \neq 1$, mà $x = 1$ lại đúng là nghiệm của phương trình, tức đã bỏ qua tác dụng trực tiếp của miền xác định. Do đó để bù lại miền xác định bị thu nhỏ do thay cơ số gây ra, nên bổ sung thêm điều kiện :

Khi $x = 1$, dễ thấy rằng $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Khi $x \neq 1$ biến đổi phương trình đã cho thành :

$$\frac{2}{\log_x 0,5x} - \frac{42}{\log_x 16x} + \frac{20}{\log_x 4x} = 0$$

Để đề phòng trong quá trình giải quên xét miền xác định, ta xuất phát từ tổng thể để biến đổi :

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x > 0 \text{ và } 0,5x \neq 1 \\ 16x > 0 \text{ và } 16x \neq 1 \\ 4x > 0 \text{ và } 4x \neq 1 \\ x > 0 \\ \dfrac{2\lg x}{\lg\frac{1}{2}x} - \dfrac{42\lg x}{\lg 16x} + \dfrac{20\lg x}{\lg 4x} = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ và } x \neq 2, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{4} \\ \lg x\left(\dfrac{1}{\lg x - \lg 2} - \dfrac{21}{\lg x + 4\lg 2} + \dfrac{10}{\lg x + 2\lg 2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ và } x \neq 2, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{4} \\ \lg x = 0 \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} x > 0 \text{ và } x \neq 2, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{\lg x - \lg 2} - \dfrac{21}{\lg x + 4\lg 2} + \dfrac{10}{\lg x + 2\lg 2} = 0 \end{cases}$$

24 - VẤN ĐỀ THAM SỐ

Trong đại số cấp hai, ta đã gặp phương trình hoặc bất đẳng thức bậc nhất có hệ số bằng chữ. Vì hệ số bằng chữ có tham gia hoặc ảnh hưởng đến quá trình giải nên ta gọi nó là tham biến số hoặc gọi tắt là tham số. Trong đại số và hình giải tích cấp ba gặp rất nhiều vấn đề có tham số.

Nguyên tắc chung để giải quyết vấn đề tham số là biến đổi tham số thành vấn đề chung. Căn cứ đặc điểm của vấn đề mà có

lúc xem tham số như hằng số, có lúc xem nó như biến số chính (thay thế vị trí biến số chính), có lúc lại phải phân loại ra để thảo luận, có lúc không cần. Dưới đây giới thiệu mấy giải pháp thường dùng đối với tham số.

1. Giải trực tiếp. Có một số trường hợp tham số không có liên quan đến quá trình giải hay đáp án mà chỉ có vai trò như hằng số thông thường, lúc đó có thể coi tham số như một số bình thường để giả·

Ví dụ 1. Giải phương trình có ẩn số x : $(a^2 + 1)x + 2 = a$.

Sau khi biến đổi phương trình thành $(a^2 + 1)x = a - 2$, ta chia hai vế của phương trình cho hệ số $(a^2 + 1)$ của x, cần hiểu rằng $a^2 + 1 \neq 0$ và không cần phải biện luận về a. Ta có :

$$x = \frac{a-2}{a^2+1}.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $(a - 1)x + 1 = a$ $(a \neq 1)$

Ta biến đổi phương trình thành $(a - 1)x = a - 1$. Vì đề bài cho $a \neq 1$ tức $a - 1 \neq 0$ nên cũng không cần biện luận về a. Chia cả hai vế cho $a - 1$ được $x = 1$.

Ví dụ 3. Giả thiết $k \in Z$, đơn giản biểu thức.

$$\frac{\sin(k\pi - \alpha)\cos(k\pi + a)}{\sin[(k+1)\pi + \alpha]\cos[(k+1)\pi - \alpha]}$$

Giải đề này nên chia ra hai trường hợp k là số nguyên chẵn và lẻ để biện luận. Nhưng nếu chú ý đến đặc trưng của biểu thức thì dùng công thức tích và hiệu có thể đổi thành :

$$\text{Biểu thức ban đầu} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 2k\pi - \sin 2\alpha)}{\frac{1}{2}[\sin 2(k+1)\pi + \sin 2\alpha]} = \frac{-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -1.$$

Như thế tức là đã chuyển từ vấn đề cần chia ra để biện luận thành vấn đề bình thường để giải trực tiếp.

2. Phân loại để thảo luận. Có một số trường hợp phải chia phạm vi lấy trị của tham số thành vài ba miền (không trùng lặp, không sót) để giải. Lúc đó trong mỗi miền, tham số sẽ trở thành hằng số bình thường để giải.

Ví dụ 4. Phán đoán đường cong của phương trình $(5 - k)x^2 + (k - 2)y^2 = 1$ là loại đường cong gì ?

Căn cứ phân loại đường cong hình nón, cần phải chia tham số k thành năm trường hợp để thảo luận : $k < 2$; $k = 2$; $2 < k < 5$; $k = 5$; $k > 5$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a x > \frac{1-(-2)^n}{3}.\log_a(x^2 - a)$ $(a > 1)$

Đây là phương trình log của x. Hai vế của bất đẳng thức đều có thừa số $\frac{1-(-2)^n}{3}$, cần phải chia n làm hai trường hợp chẵn và lẻ để lần lượt thảo luận.

Khi n lẻ, $\frac{1-(-2)^n}{3} > 0$, bất đẳng thức đã cho bằng $\log_a x > \log_a(x^2 - a)$.

Khi n chẵn $\frac{1-(-2)^n}{3} < 0$, bất đẳng thức đã cho bằng $\log_b x < \log_a(x^2 - a)$.

Ví dụ 6. Giải bất đẳng thức của x : $mx^2 - x - (m + 1) < 0$

Theo dạng của bất đẳng thức chia ra :

Khi $m = 0$, ta có bất đẳng thức bậc nhất một ẩn $-x - 1 < 0$.

Khi $m \neq 0$, ta có bất đẳng thức bậc hai một ẩn, lúc đó lại phải xét hệ số m của số hạng x^2 với $m > 0$ và $m < 0$. Biệt thức $\Delta = 1 + 4m(m + 1) = (2m + 1)^2$ nên lại chia ra khi $m \neq -\frac{1}{2}$ và $m = -\frac{1}{2}$.

Khi $m \neq -\frac{1}{2}$, tam thức bậc hai $mx^2 - x - (m + 1)$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{m+1}{m}$, $x_2 = -1$. Vì $\frac{m+1}{m} - (-1) = \frac{2m+1}{m}$ ta biết theo thứ tự to nhỏ của hai nghiệm có thể chia thành hai trường hợp :

Khi $m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m > 0$, $\frac{m+1}{m} > -1$

Khi $-\frac{1}{2} < m < 0$, $\frac{m+1}{m} < -1$

Tổng hợp sự phân tích ở trên, có thể thảo luận theo năm trường hợp dưới đây : $m = 0$; $m > 0$; $-\frac{1}{2} < m < 0$; $m = -\frac{1}{2}$; $m < -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 7. Tìm trị cực đại và cực tiểu của hàm số $y = x|x - 1| - ax$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ khi $-1 \leqslant a \leqslant 3$.

Theo nghĩa của giá trị tuyệt đối, đầu tiên ta chia x thành hai miền $0 \leqslant x < 1$ và $1 \leqslant x \leqslant 2$ để lần lượt tìm cực đại và cực tiểu của nó.

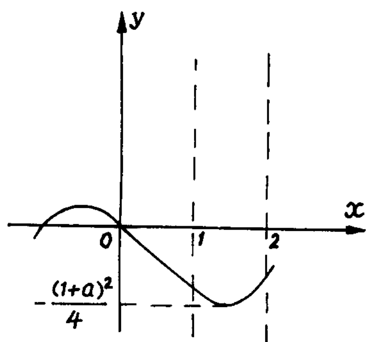
Khi $0 \leqslant x < 1$, $y = x(1 - x) - ax = -x^2 - (a - 1)x$.

Khi $1 \leqslant x \leqslant 2$, $y = x(x - 1) - ax = x^2 - (a + 1)x$

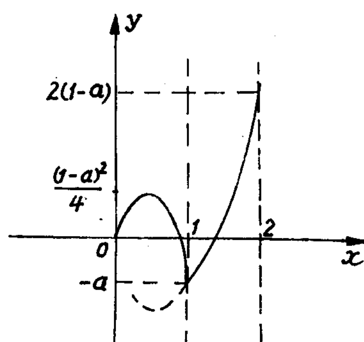
$$\text{Tức } y = \begin{cases} -\left(x - \frac{1-a}{2}\right)^2 + \frac{(1-a)^2}{4} & (0 \leqslant x < 1) \\ \left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{(a+1)^2}{4} & (1 \leqslant x \leqslant 2) \end{cases}$$

Để tìm cực trị của y, đòi hỏi phải kết hợp nghiên cứu đồ thị của hàm bậc hai với vị trí tương đối của $\frac{a+1}{2}$, $\frac{1-a}{2}$, $\frac{(a+1)^2}{4}$, $\frac{(1-a)^2}{4}$ và thảo luận với hai miền của a : $1 \leqslant \frac{a+1}{2} \leqslant 2$ và $0 \leqslant \frac{a+1}{2} < 1$.

1) Như hình 25 - 1, nếu $1 \leqslant \frac{a+1}{2} \leqslant 2$ tức $1 \leqslant a \leqslant 3$, lúc đó $-1 \leqslant \frac{1-a}{2} \leqslant 0$. Điều đó nói lên đỉnh của một phần đồ thị $\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{(a+1)^2}{4}$ ở trong miền $1 \leqslant x \leqslant 2$, còn đỉnh của đồ thị $\left(x - \frac{1-a}{2}\right)^2 + \frac{(1-a)^2}{4}$ không ở trong miền $0 \leqslant x \leqslant 1$.



Hình 25–1



Hình 25–2

Cho nên khi $1 \leqslant a \leqslant 3$, $y_{max} = 0$, $y_{min} = -\frac{(a+1)^2}{4}$.

2) Hình 25–2, nếu $0 \leqslant \frac{a+1}{2} < 1$, $-1 \leqslant a < 1$. Lúc đó $0 < \frac{1-a}{2} \leqslant 1$. Điều đó chứng tỏ đỉnh của hai đồ thị đều ở trong $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Để tìm cực đại của y, phải so sánh tung độ $\frac{(1-a)^2}{4}$ của điểm đỉnh đồ thị $-\left(x - \frac{1-a}{2}\right)^2 + \frac{(1-a)^2}{4}$ với tung độ điểm giới hạn phải của đồ thị $\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{(a+1)^2}{4}$.

Vì $f(2) - \frac{(1-a)^2}{4} = 2(1 - a) - \frac{(1-a)^2}{4} = (1 - a)\frac{7+a}{4} > 0$

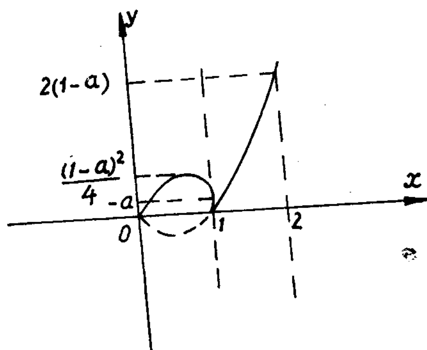
nên $y_{max} = f(2) = 2(1 - a)$.

Tương tự, để tìm cực tiểu y_{min}, phải so sánh $f(1) = -a$ và $f(0) = 0$, lại chia làm hai trường hợp.

Khi $0 \leqslant a \leqslant 1$, $-a \leqslant 0$ thì $y_{min} = -a$

Khi $-1 \leqslant a \leqslant 0$, $-a > 0$ thì $y_{min} = 0$

(hình 25-3)



Hình 25-3

Trên đây đã chú trọng giới thiệu hai phương pháp cơ bản nhất để giải quyết vấn đề tham số. Mời bạn đọc tự tổng kết trong điều kiện nào có thể giải trực tiếp mà không cần biện luận, còn trong điều kiện nào thì phải phân loại để biện luận. Chỉ có thế mới có thể vận dụng nó một cách thoải mái, chủ động.

25 - KHÉO LÉO GIẢI NHỮNG ĐỀ CHỌN LỌC

Những đề chọn lọc và đề trắc nghiệm điền chỗ trống, có bốn hoặc năm đáp án, gọi là các "nhánh chọn". Đối với những đề chọn

lọc có và chỉ có một đáp án duy nhất đúng, phân tích đầy đủ các điều kiện và đặc trưng của nhánh chọn thường có được cách giải nhanh gọn nhất.

1. Cách giải gián tiếp

1. Phương pháp loại trừ dần. Căn cứ đáp số duy nhất đúng, dùng mọi thủ đoạn sàng lọc nhánh chọn, loại dần những nhánh chọn mâu thuẫn với đề bài, từ đó mà được đáp án duy nhất.

Ví dụ 1. Bình phương của một số nguyên là số chính phương. Nếu m là số chính phương thì số chính phương lớn hơn và gần nó nhất sẽ là : (A) $m^2 + 1$, (B)$m^2 + 2m + 1$, (C) $m^2 + m$, (D) $m + 2\sqrt{m} + 1$.

Giải. Số chính phương cần tìm nhất định phải liên quan với số chính phương m. Trong các nhánh chọn chỉ có (B) có thể biến đổi thành $(m + 1)^2$, (D) có thể biến đổi thành $(\sqrt{m} + 1)^2$ nên đáp án phải nằm trong (B) và (D).

Vì dạng đại số của (B) và (D) đều lớn hơn m nên số chính phương cần tìm phải là số nhỏ hơn trong hai số (B) và (D). Do đó chọn (D).

Ví dụ 2. Giả thiết ba cạnh a, b, c của tam giác ABC phù hợp với đẳng thức : $a\cos A + b\cos B = c\cos C$, vậy tham số đó nhất định là

(A) Tam giác vuông có a là cạnh huyền ;

(B) Tam giác vuông có b là cạnh huyền ;

(C) Tam giác cân ; (D) Tam giác thường.

Giải : Quan sát điều kiện $a\cos A + b\cos B = c\cos C$ là dạng a, A và b, B đối xứng nhau, nên có thể thấy nhánh (A) và (B) có giá trị như nhau. Vì dáp án là duy nhất, nên ta loại bỏ ; còn nếu (C) đúng thì đẳng thức sẽ trở thành $2 = 1$, mâu thuẫn với đẳng thức, cũng loại bỏ. Vậy chỉ có thể chọn (D).

Ví dụ 3. Nghiệm của bất đẳng thức $2x^2 + 5x - 3 > 0$ là :

(A) $x < -3$, (B) $x > \frac{1}{2}$, (C) $x < -3$ hoặc $x > \frac{1}{2}$, (D) $-3 < x < \frac{1}{2}$

Giải. Xét đặc điểm của (D), giả thiết $x = 0$, rõ ràng không phù hợp với bất đẳng thức, bỏ (D).

Chú ý (A) và (B) hợp lại thành (C), trong ba nhánh chọn còn lại chỉ có (C) là đúng. Thực tế thì nếu cho $x = -4$, $x = 1$ đều phù hợp với bất đẳng thức, nên ta chọn (C).

Ví dụ 4. Nếu $|\cos\theta| = \frac{1}{5}$, $\frac{5}{2}\pi < \theta < 3\pi$ vậy giá trị $\sin\frac{\theta}{2}$ bằng

(A) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$, (B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$, (C) $-\frac{\sqrt{15}}{5}$, (D) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Giải. Đề đã giả thiết $\frac{5}{2}\pi < \theta < 3\pi$, suy ra $\frac{5}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{3}{2}\pi$. Chú ý đến $\sin\frac{\theta}{2}$ ở miền này là hàm số giảm, nên $-\frac{\sqrt{2}}{2} > \sin\frac{\theta}{2} > -1$

Trong các nhánh chọn chỉ có (C) trong phạm vi này, nên chọn (C).

Giải thích : Đặc điểm của cách loại trừ dần để giải là :

1) Vấn đề không dễ (hoặc không có cách gì) để phán đoán trực tiếp.

2) Trong nhánh chọn có điều sai hoặc mâu thuẫn rõ ràng (có thể xét định lượng hoặc định tính để loại bỏ) ; giữa các nhánh chọn có quan hệ bao hàm nhau (cần kết hợp với điều kiện đã cho để phán đoán).

3) Trong các nhánh chọn có trường hợp có giá trị như nhau thì nên loại bỏ các nhánh đó.

Ví dụ 5. Các nhóm số sau, những nhóm nào không thỏa mãn phương trình $85x - 324y = 101$?

(A) $x = 329$, $y = 86$, (B) $x = 653$, $y = 171$

(C) $x = 978$, $y = 256$, (D) $x = 1301$, $y = 341$.

Giải. Quan sát vế trái đẳng thức, số hạng 324y nhất định là số chẵn, còn vế phải 101 là số lẻ, nên có thể biết 85x là số lẻ, cho nên x phải là số lẻ. Chú ý trong các nhánh chọn (A) (B) (D) x đều là số lẻ chỉ có (C) x là số chẵn. Vậy lấy (C) là nhóm không thỏa mãn phương trình.

Ví dụ 6. Giả thiết tập hợp $P = \{a^2, a + 1, -3\}$, $Q = \{a - 2, 2a + 1, a^2 + 1\}$ thỏa mãn $P \cap Q = \{-3\}$ thì trị của a là :

(A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) –1.

Giải. Đem a = 0 (hoặc 1, 2, –1) lần lượt thay vào P, Q xét tính duy nhất của tập hợp và kiểm tra xem có thỏa mãn $P \cap Q = \{-3\}$ thì sẽ biết được a = –1.

Giải thích. Đề này thực tế chỉ cần lần lượt thay a = 0, 1, 2 vào là được. Vì (A) (B) (C) đều không đúng nên đáp án duy nhất đúng là (D).

Ví dụ 7. Phương trình tọa độ cực đi qua điểm $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ và song song với trục cực là : (A) $\rho\sin\theta = \sqrt{3}$, (B) $\rho\sin\theta = 1$

(C) $\rho\cos\theta = \sqrt{3}$, (D) $\rho\cos\theta = 1$

Giải. Xét đường thẳng song song với trục cực, đầu tiên loại bỏ (C), (D) rồi thay điểm $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ vào (A) và (B) biết không đúng với (A) nên chọn (B).

Ví dụ 8. Nếu hàm số f(x) đối với bất kì số dương nào của x, y đều có f(x, y) = f(x) + f(y) thì các đẳng thức sau đây những đẳng thức nào sai :

(A) f(1) = 0, (B) $f(x^3) = 3f(x)$ (x > 0)

(C) f(x) = 1 (x > 0), (D) $f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}f(x)$ (x > 0)

Giải. Lấy một giá trị đặc biệt x = y = 1, vì luôn có f(1) = f(1) + + f(1) được f(1) = 0, do đó (A), (B), (D) đều đúng, chỉ có (C) không đúng. Do đó chọn (C) là đẳng thức sai.

Ví dụ 9. Miền giá trị của hàm số $y = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{2x-3}$ là :

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, (B) $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$,

(C) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, (D) $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Giải. Trong các nhánh chọn (A) (B) (D) đều chứa y = 0, nhưng khi y = 0 sẽ có $\arccos\frac{1}{2x-3} = \frac{\pi}{2}$, lúc đó $\frac{1}{2x-3} = 0$, đó là điều không thể được.

Do đó (A) (B) (D) đều phải loại bỏ, vậy chọn (C).

Giải thích : Phương pháp thay vào thực chất là biện pháp đặc biệt của phương pháp loại trừ dần. Khi các nhánh chọn là một trị số xác định thì có thể thay trực tiếp vào để kiểm chứng đi đến loại trừ những kết luận sai. Khi các nhánh chọn là những giá trị trong một phạm vi nào đó thì có thể lấy một giá trị đặc biệt nào đó trong phạm vi ấy thay vào dữ kiện để kiểm chứng, nếu điều kiện không thỏa mãn thì nhánh đó sai, nếu nhiều nhánh cùng thỏa mãn điều kiện, thì lại chọn giá trị đặc biệt khác thay vào kiểm nghiệm để loại trừ dần cho đến khi tìm được nhánh duy nhất thì thôi.

Ví dụ 10. Giả thiết xy = a, yz = b, zx = c, các số thực ở trên đều khác không thì trị của $x^2 + y^2 + z^2$ là :

(A) $\frac{ab + bc + ca}{abc}$, (B) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

(C) $\frac{(ab + bc + ca)^2}{abc}$, (D) $\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc}$

Giải. Lấy giá trị đặc biệt x = y = z = 1 thì a = b = c = 1.

Lúc đó $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $\frac{ab + bc + ca}{1} = \frac{1 + 1 + 1}{1} = 3$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = 3, \frac{(ab + bc + ca)^2}{abc} = \frac{(1 + 1 + 1)^2}{1} = 9.$$

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} = 3, \text{ cho nên loại trừ (C).}$$

Ta lại lấy giá trị đặc biệt khác $x = y = 1$, $z = -1$ thì $a = 1$, $b = c = -1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad \frac{ab + bc + ca}{abc} = -1,$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = 3, \quad \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} = 3$$

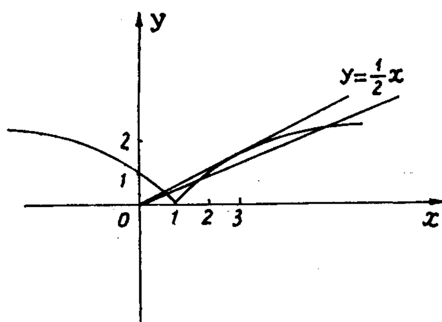
Loại trừ (A). Ta lại lấy giá trị đặc biệt khác : $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ ta có $a = -1$, $b = -2$, $c = 2$, lúc đó $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Lần lượt thay vào (B) (D) để kiểm chứng. $\frac{a^2+ b^2+ c^2}{abc} = \frac{1+4+4}{(-1)\times(-2)\times 2} = \frac{9}{4}$, (B) sai, loại bỏ. (D) đúng nên chọn (D).

3. Phương pháp đồ thị. Có một số trường hợp giải phương trình hoặc bất phương trình phải dựa vào đồ thị của hàm số, qua quan sát, phân tích loại bỏ một số nhánh chọn để thu hẹp phạm vi chọn đạt được kết quả nhanh.

Ví dụ 11. Khi $0 < k < \frac{1}{2}$, nghiệm thực của phương trình $\sqrt{|1-x|} = kx$ là : (A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) 4.

Giải : Theo đề ta biết $x > 0$, vẽ đường cong của $y = \sqrt{|1-x|}$ như hình 26-1. Lấy $k = 0$ thì đường thẳng $y = 0$ có 1 điểm chung với

đường cong. Lấy $k = \frac{1}{2}$ thì đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$ cắt nhánh trái của đường cong và tiếp tuyến với nhánh phải đường cong. Cho nên khi $0 < k < \frac{1}{2}$, đường thẳng $y = kx$ cắt cả hai nhánh trái, phải của đường cong, nên có ba giao điểm. Vậy chọn (C)

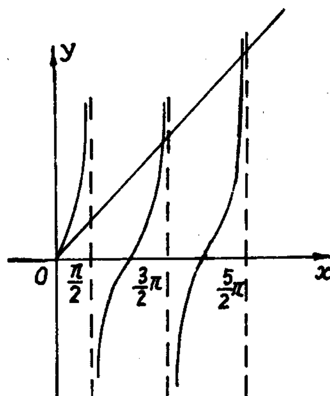


Hình 26–1

Ví dụ 12. Phạm vi nghiệm dương của phương trình $\operatorname{tg}x = x$ là

(A) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, (C) $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ($k \in Z$, $k \geq 0$) (D) $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ($k \in N$).

Giải. Cùng trong một hệ tọa độ, vẽ đồ thị của hàm số $y = \operatorname{tg}x$ và $y = x (x > 0)$ (hình 26–2), phát hiện thấy hai đường cong có vô số giao điểm, do đó loại bỏ (A) (B) ; còn trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ chúng không có giao điểm, nên loại bỏ (C) nên chọn (D).



Hình 26–2

2. Cách giải trực tiếp

Nếu đề dùng cách giải gián tiếp không thích hợp thì có thể xem nó như loại đề bình thường, trực tiếp xuất phát từ các điều kiện đã cho, vận dụng định nghĩa, định lí, công thức v.v.. để giải tìm kết quả, rồi đối chiếu với các nhánh chọn, từ đó xác định được đáp số cần thiết. Căn cứ vào các biện pháp giải khác nhau có thể chia thành hai loại phương pháp chính như sau :

1. Phương pháp tính toán.

Ví dụ 1. Tìm phân số sau

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} \cdot \text{(A) } \frac{5}{6}, \text{ (B) } \frac{6}{11}, \text{ (C) } \frac{11}{6}, \text{ (D) } \frac{7}{10}$$

Phân tích. Đề này không có cách gì để giải gián tiếp, chỉ có cách đơn giản trực tiếp để tìm.

Giải : $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{1+\frac{3}{2\times 3+1}} = \dfrac{1}{1+\frac{3}{7}} = \dfrac{7}{7+3} = \dfrac{7}{10}.$

Ta chọn (D).

Ví dụ 2. Nếu $\cos\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha - \sin\beta = -\frac{1}{3}$ thì trị của $\sin(\alpha+\beta)$ là : (A) $\frac{12}{13}$, (B) $-\frac{12}{13}$, (C) $\frac{5}{13}$, (D) $-\frac{5}{13}$.

Giải : Ta biến đổi $\cos\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = -\frac{1}{3} \Rightarrow 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{1}{3} \qquad (2)$$

chia (1) cho (2) được $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{3}{2}.$

Theo công thức ta có

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2\text{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1 + \text{tg}^2\dfrac{(\alpha+\beta)}{2}} = \frac{2 \times \dfrac{3}{2}}{1 + \dfrac{9}{4}} = \frac{12}{13}.$$ Chọn (A).

2) Phương pháp tổng hợp.

Ví dụ 3. Giả thiết $n \in N$ thì giá trị của $\frac{1}{8}(n^2 - 1)$ $[1 - (-1)^n]$ là :

(A) chắc chắn là không , (B) chưa chắc là số nguyên

(C) nhất định là số chẵn, (D) là số nguyên nhưng không nhất thiết là số chẵn.

Giải. Xét dấu $n \in N$, ta chia n thành hai trường hợp chẵn, lẻ để xét. Khi n là số lẻ dương, $n = 2k - 1$ $(k \in N)$ thì biểu thức đã cho bằng $k(k - 1)$ là số chẵn.

Khi n là số chẵn dương, $n = 2k$ $(k \in N)$ thì biểu thức đã cho bằng không, là số chẵn.

Do đó có thể thấy khi $n \in N$, trị biểu thức đã cho là chẵn nên ta chọn (C).

Ví dụ 4. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác không gian lần lượt lấy 4 điểm E, G, H, F. Nếu EF và GH giao nhau ở điểm O thì : (A) Điểm O nằm trên AC, (B) Điểm O nằm trên BD.

(C) Điểm O nằm trong mặt phẳng ABC.

(D) Điểm O nằm ngoài mặt phẳng ABD, BCD.

Giải. Điểm O vừa ở trên mặt phẳng AEF, vừa ở trên mặt phẳng CGH. Do đó điểm O phải ở trên giao tuyến của hai mặt trên. Nên ta chọn (B).

3. Cách giải hỗn hợp. Có một số đề lựa chọn có thể dựa theo điều kiện đã cho và đặc điểm nhánh chọn, có thể kết hợp các phương pháp gián tiếp với phương pháp trực tiếp để vận dụng linh hoạt, tìm ra cách giải nhanh gọn. Đó gọi là cách giải hỗn hợp.

Ví dụ 1. Trong tam giác ABC, nếu sinA sinB < cosA cosB thì đó là tam giác : (A) có ba góc nhọn, (B) tam giác vuông.

(C) có góc tù, (D) tam giác bất kì.

Giải. Giả thiết $0^o < A < 180^o$, $0^o < B < 180^o$, biết sinA. .sinB > 0 do đó cosA cosB > 0, ta được $\hat{A}$, $\hat{B}$ đều là góc nhọn.

Cho A = 45^o thì sin B < cosB $\Rightarrow 0^o < B < 45^o$. Do đó $\hat{A} + \hat{B} < 90^o$. Nên chọn (C).

Giải thích. Quá trình giải đề này đã dùng cách giải trực tiếp, dùng cách lấy trị đặc biệt thay vào và cách loại dần tức phương pháp hỗn hợp.

Ví dụ 2. Biết phương trình tọa độ cực của elip là $\rho = \frac{5}{3-2\cos\theta}$. Vậy trục ngắn của nó là : (A) $\frac{10}{3}$, (B) $\sqrt{5}$, (C) $2\sqrt{5}$, (D) $2\sqrt{3}$.

Giải. Biến đổi phương trình tọa độ cực của elip thành

$\rho = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{2}{3}\cos\theta}$ có thể biết được độ lệch tâm e của elip là $e = \frac{2}{3}$.

Nên a = 3k, c = 2k (k ∈ N).

Do đó $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(3k)^2 - (2k)^2} = \sqrt{5}k$.

Vậy $2b = 2\sqrt{5}k$

Chú ý đến k ∈ N, do đó trục ngắn của elip là một số gấp $2\sqrt{5}$ nguyên dương lần, chỉ có (C) thích hợp như thế. Vậy chọn (C).

Ví dụ 3. Số phức Z thỏa mãn hệ thức $Z + |\overline{Z}| = 2 + i$. Vậy Z bằng : (A) $-\frac{3}{4} + i$, (B) $\frac{3}{4} - i$, (C) $-\frac{3}{4} - i$, (D) $\frac{3}{4} + i$.

Giải. Vì trong các nhánh chọn, môđun của bốn số phức đều nhỏ hơn 2 và đã biết trong đó phải có một môđun bằng Z, nên $|Z| < 2$. Chú ý đến môđun của số phức liên hợp bằng nhau. Do đó $|\overline{Z}| < 2$. Giả thiết $Z = a + bi$, thay vào đẳng thức đã cho ta được :

$a + bi + |\overline{Z}| = 2 + i$ tức $a + bi = \left(2 - |\overline{Z}|\right) + i$. Căn cứ vào điều kiện bằng nhau của hai số phức ta được

$\begin{cases} a = 2 - |\overline{Z}| > 0 \\ b = 1 \end{cases}$ Trong các nhánh chọn chỉ có phần thực của số phức trong nhánh (D) $a = \frac{3}{4} > 0$ và phần của $b = 1$, nên chọn (D).

Giải thích. Khi giải đề này đã khéo dùng đặc điểm phần thực và phần ảo trong nhánh chọn để tránh được sự tính toán phức tạp do việc tìm phần thực a gây ra.

26 - BỒI DƯỠNG THÓI QUEN GIẢI XONG ĐỀ VẪN TIẾP TỤC SUY NGHĨ

Rất nhiều học sinh, giải xong bài liền cho rằng công việc đã xong, hết việc. Thực ra, điều đó chưa đủ. Chỉ có thể nói, làm xong đề là mới xong một nửa nhiệm vụ. Còn có một nửa sau cần làm, đó là phải tiếp tục suy nghĩ. Cứ kiên trì như thế sẽ bồi dưỡng thành thói quen tốt là giải xong đề vẫn tiếp tục suy nghĩ.

Vậy sau khi giải đề xong cần từ những phương diện nào để suy nghĩ tiếp ?

1) Đối với đề điển hình hay đề khó hãy nghĩ lại xem mình đã phát hiện hướng suy nghĩ giải ra sao ?

2) Đặc điểm của hướng suy nghĩ ấy là gì ? Nó dùng thích hợp cho loại đề nào ?

3) Đề đó dùng đến những kiến thức cơ sở và lý luận cơ bản nào ? Dùng những phương pháp toán học nào ?

4) Có thể từ một góc độ khác để xét vấn đề được không ? Còn cách giải nào ngắn gọn hơn không ? Hoặc nghiên cứu sâu thêm về kết luận của bài toán.

5) Những bài giải sai hoặc làm không ra, nên hồi tưởng lại tỉ mỉ, lúc đó vì sao lại như thế ? Nguyên nhân tại đâu ? Là do kiến thức còn hổng hay hiểu đề chưa tốt ? Phải đối chiếu thật kỹ với cách giải đúng, nghĩ xem hướng suy nghĩ của mình sai chỗ nào hay gặp trở ngại gì ?

Dưới đây nêu một số ví dụ.

Trong một lần học toán ở lớp học sinh đầu cấp hai luyện thi Ôlempic, thầy giáo ra đề thi sau :

Biết chu vi của tam giác đều lớn hơn chu vi hình vuông 1992cm. Cạnh tam giác lớn hơn cạnh hình vuông d cm (d >0). Vậy số nguyên d không thể lấy là : (A) 662, (B) 663, (C) 664, (D) nhiều vô cùng.

Có một học sinh nghĩ ngược nghĩ xuôi, không thể nghĩ ra được. Sau đó thầy giáo giảng, phân tích cách giải bài đó. Đối chiếu với cách giải đúng, cậu bé suy nghĩ thật kĩ về nguyên nhân làm tắc sự suy nghĩ của mình và cảm thấy vấn đề là ở chỗ cậu ta đã không biết dùng chữ để biểu thị ẩn số, lập phương trình để giải. Cậu đó đưa những điều còn tồn tại trong học toán nhờ thầy giải đáp. Thầy căn dặn phải khắc phục ảnh hưởng của lối tư duy tính toán của tiểu học, tăng cường ý thức dùng phương pháp đại số để giải quyết vấn đề, phải tập thật nhiều cách dùng chữ biểu thị ẩn số để giải. Qua một thời gian cố gắng, học sinh đó đã tiến bộ rất nhanh. Về

sau trong một cuộc thi giành cúp mùa xuân cậu ta đã giải được một đề rất khó mà nhiều học sinh không giải được.

Ví dụ : Viết một số nguyên tố có hai chữ số sau một số nguyên tố có hai chữ số khác với nó để được một số bốn chữ số. Biết rằng số bốn chữ số này chia hết cho nửa tổng của hai số nguyên tố kia. Thử tìm tất cả những số có bốn chữ số có tính chất đó.

Giải . Giả thiết hai số nguyên tố có hai chữ số đó là x và y ($x \neq y$). Theo đề ra được $100x + y = k\frac{x + y}{2}$, trong đó k là số tự nhiên. Chỉnh lý ta được $(200 - k)x = (k - 2)y$. (1)

Vì x, y đều là số nguyên tố, nên x và y nguyên tố với nhau.

$$y \mid 200 - k, \qquad x \mid k - 2.$$

Cho nên $200 - k = my$ (m là số tự nhiên) (2)

Thay vào đẳng thức (1) ta được $myx = (k - 2)y$.

Hay $mx = k - 2$ (3)

Triệt tiêu k trong (2) và (3) được

$$m(x + y) = 198 = 2 \times 3^2 \times 11$$

Do đó $x + y = 198$, $x + y = 66$, $x + y = 22$.

Vì x, y là các số nguyên tố có hai chữ số và $x \neq y$. Qua thử nghiệm chỉ có $x + y = 66$ thỏa mãn điều kiện. Ta lập bảng

x	13	53	19	47	23	43	29	37
y	53	13	47	19	43	23	37	29

Cho nên các số bốn chữ số cần tìm là : 1353 , 5313 ; 1947, 4719 ; 2343, 4323 ; 2937, 3729.

Lộc Phùng Bột, sinh viên khoa Lực học hiện đại của Đại học Khoa học kỹ thuật Trung quốc khi nói đến làm thế nào để học tốt môn toán phổ thông đã đưa ra một câu chuyện sinh động về sự suy nghĩ sau khi giải đề xong.

Anh ta nói :"Đây là một đề bài, sau khi làm xong, tôi suy nghĩ tiếp và đã tìm được hướng suy nghĩ mới. Biết hai dãy số liệt dương $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, với bất cứ $n \in N$ đều có a_n, b_n, a_{n+1} tạo thành cấp số cộng ; b_n, a_{n+1} b_{n+1} tạo thành cấp số nhân và $a_1 = 1$, $b_1 = 2$. Tìm a_n và b_n.

Bài này dùng phép qui nạp có thể giải được, nhưng rườm rà dễ sai. Nếu đổi hướng suy nghĩ, có thể biến đổi như sau :

Vì $2b_n = a_n + a_{n+1}$, $a_n = \sqrt{b_n b_{n-1}}$, $a_{n+1} = \sqrt{b_n b_n + 1}$.

nên $2b_n = \sqrt{b_n b_n - 1} + \sqrt{b_n b_n + 1}$; $2\sqrt{b_n} = \sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{b_{n+1}}$

Cho nên dễ biết được $\sqrt{b_n}$ là cấp số cộng. Từ đó mà tìm ra a_n, b_n.

Phương pháp này vừa tránh được tính không duy nhất do sự phán đoán qui nạp gây ra và quá trình chứng minh qui nạp rườm rà, đồng thời tìm ra được hướng suy nghĩ mới để chứng minh đối với loại đề này.

Dưới đây là ví dụ về sự suy nghĩ sau khi giải của một thầy giáo.

Chứng minh. Nếu trong tam giác ABC, nghịch đảo của ba cạnh a, b, c thành cấp số cộng thì góc B đối diện với cạnh b phải là góc nhọn.

Chứng minh : Vì $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \geqslant \dfrac{2ac - b^2}{2ac}$

Vì $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$ nên $2ac = b(a + c)$. Do đó

$$\cos B = \frac{b(a + c) - b^2}{2ac} = \frac{b(a + c - b)}{2ac}$$

Vì trong tam giác ABC : $a + c - b > 0$ cho nên $\cos B \geqslant 0$

Lại vì $0 < B < \pi$ nên B là góc nhọn.

Suy nghĩ : Trên đây ta qua chứng minh $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} > 0$ từ đó mà tìm được $\widehat{B}$ là góc nhọn. Bây giờ ta tiến thêm một bước nghĩ, có thể chứng minh được $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \geqslant a_0 > 0$, từ đó mà tính toán B được chính xác hơn không ?

$$\text{Vì } \cos B \geqslant \frac{2ac - b^2}{2ac} = 1 - \frac{b^2}{2ac} = 1 - \frac{\left(\dfrac{2ac}{a+c}\right)^2}{2ac} =$$

$$= 1 - \frac{2ac}{(a+c)^2} = 1 - \frac{1}{\dfrac{a^2 + c^2}{2ac} + 1} \geqslant 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Vì $\cos B \geqslant \frac{1}{2}; 0 < B < \pi$ nên dự tính B càng chính xác hơn :

$\frac{\pi}{3} \leqslant B \leqslant \pi$.

Dưới đây giới thiệu một bạn học sinh cấp ba đã phân tích sự sai lầm của mình ra sao để tự thể nghiệm được kiến thức đúng đắn. Anh ta nói : Một hôm sau giờ học toán, thầy giáo cho một đề bài :

Giả thiết $f(x) = ax^2 + bx$ thỏa mãn bất đẳng thức $1 \leqslant f(-1) \leqslant 2$, $2 \leqslant f(1) \leqslant 4$. Thử tìm phạm vi lấy giá trị của $f(-2)$.

Đọc đề xong, tự nhiên tôi nghĩ đến đầu tiên phải tìm ra phạm vi a, b, sau đó lợi dụng chúng để tìm phạm vi $f(-2)$, do đó rất nhanh đi đến cách giải sau :

Từ $1 \leqslant f(-1) \leqslant 2$, $2 \leqslant f(1) \leqslant 4$ được $1 \leqslant a - b \leqslant 2$ (1)

$2 \leqslant a + b \leqslant 4$ (2). Cộng (1) với (2) được $3 \leqslant 2a \leqslant 6$,

tức $6 \leqslant 4a \leqslant 12$ (3)

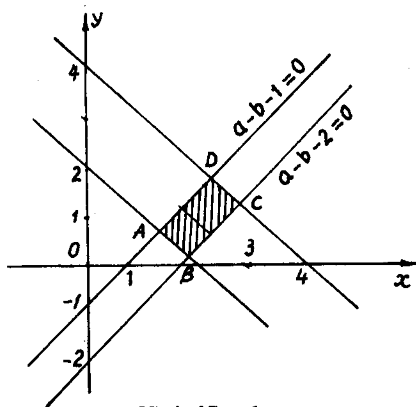
Lấy (2) nhân với – 1 (nhớ đảo dấu) rồi cộng với 1 được

$-3 \leqslant -2b \leqslant 0$ (4). Từ (3) và (4) được $3 \leqslant 4a - 2b \leqslant 12$,

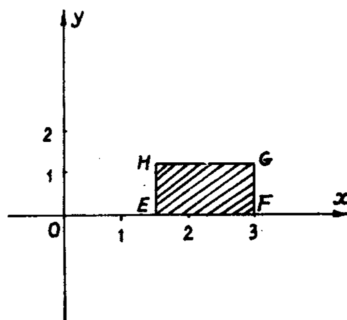
nên $-3 \leqslant f(-2) \leqslant 12$.

Thầy giáo nói kết quả này sai ! Tôi sai thật sao ?

Sai ở đâu ? Qua một trận lao tâm khổ tứ cuối cùng mới biết nguồn gốc sai là do sau khi tính ra $6 \leqslant 4a \leqslant 12$, $-3 \leqslant -2b \leqslant 0$ đã bỏ qua không xét đến sự hạn chế của hai bất đẳng thức (1) và (2). Nếu kết hợp với hình vẽ mà xét thì tương đương với việc cho rằng phạm vi lấy trị của a và b là hình chữ nhật EFGH (hình 27 – 2), nhưng thực chất là hệ đường thẳng song song $a + b - 4 = 0$ và $a + b - 2 = 0$ với $a - b - 1 = 0$ và $a - b - 2 = 0$ tạo thành phạm vi miền hình chữ nhật ABCD (hình 27 – 1). Do đó đã mở rộng phạm vi của a, b dẫn đến sai .



Hình 27 – 1



Hình 27 – 2

Tìm được nguyên nhân, bạn ấy đã không dừng lại đó, suy nghĩ tiếp và tìm ra ba cách giải khác nhau.

Cách giải 1 . $1 \leqslant a - b \leqslant 2$ (1), $2 \leqslant a + b \leqslant 4$ (2)

Lấy 3 × (1) + (2) ta được $5 \leqslant 4a - 2b \leqslant 10$ tức $5 \leqslant f(-2) \leqslant 10$.

Cách giải 2 : từ $f(x) = ax^2 + bx$ được $f(-1) = a - b$.

$f(1) = a + b$. Liên kết lại với nhau để giải sẽ được

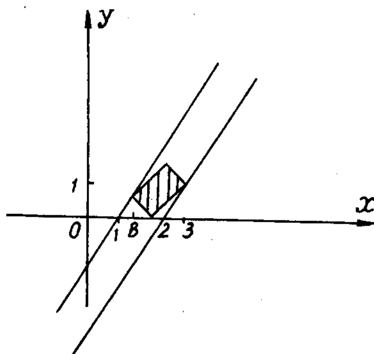
$$a = \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)], \quad b = \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)].$$

Do đó $f(-2) = 4a - 2b = 2[f(1) + f(-1)] - [f(1) - f(-1)] =$ $= f(1) + 3f(-1)$. Để bài giả thiết $1 \leqslant f(-1) \leqslant 2$, $2 \leqslant f(1) \leqslant 4$ ta có $2 + 3 \times 1 \leqslant f(1) + 3(f-1) \leqslant 4 + 3 \times 2$ tức $5 \leqslant f(-2) \leqslant 10$.

Cách giải 3.

Từ $\begin{cases} a - b - 1 = 0 \\ a + b - 2 = 0 \end{cases}$ được giao điểm A của hai đường thẳng là $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Từ $\begin{cases} a - b - 2 = 0 \\ a + b - 4 = 0 \end{cases}$ được giao điểm C (3, 1).

Lại vì $f(-2) = 4a - 2b$. Đặt $t = 4a - 2b$ tức $4a - 2b - t = 0$. Đồ thị của chúng là một họ đường thẳng có độ dốc bằng 2. Việc tìm phạm vi lấy trị của f(–2) mà trị này lại bị sự phụ thuộc lẫn nhau của a, b trong điều kiện bài toán ràng buộc. Vấn đề có thể được giải quyết thông qua tìm trị tung độ lớn nhất của giao điểm giữa đường thẳng $4a - 2b - t = 0$ với hình chữ nhật có kẻ gạch. Từ hình 27 – 3 có thể thấy khi qua điểm $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ giao



Hình 27 – 3

điểm $-\frac{t}{2}$ lớn nhất, trị t nhỏ nhất, trị nhỏ nhất là $4a - 2b = 4 \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 5$. Khi qua điểm C (3,1) điểm cắt $-\frac{t}{2}$ nhỏ nhất, trị t lớn nhất, trị lớn nhất là $4a - 2b = 4 \times - 2 \times 1 = 10$.

Cho nên $5 \leq f(-2) \leq 10$.

Cuối cùng bạn học sinh ấy đã phân tích, so sánh ba cách giải trên, chỉ ra cách giải 1 tính toán đơn giản ; cách giải ba trực quan rõ ràng nhưng cũng bị giới hạn cục bộ ; cách giải hai giá trị của a và b được dùng biểu thức bậc nhất của f(1) và f(−1) để biểu thị, nêu lên đầy đủ quan hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa a và b, cách diễn đạt chính xác, phạm vi ứng dụng rộng rãi.

Từ ví dụ trên ta có thể thấy, sự tiếp tục suy nghĩ là rất cần thiết, rất có hiệu quả. Giải xong vẫn suy nghĩ tiếp thực tế là một lần học lại, là một khâu quan trọng trong chuỗi xích xây dựng kiến thức mới.

27 - KHÔNG NGỪNG KHẮC PHỤC ẢNH HƯỞNG TIÊU CỰC CỦA THÓI QUEN TÂM LÝ

Một lần thầy giáo ra cho tám mươi em học trò lớp sáu một đề bài : So sánh các phân số sau $\frac{10}{17}, \frac{12}{19}, \frac{15}{23}, \frac{20}{33}, \frac{60}{37}$ và dùng dấu < để lần lượt xếp chúng từ nhỏ đến lớn, xem ai tìm ai nhanh nhất ? Ba phút trôi qua, khi nhiều học sinh còn hòa đồng mẫu số thì có bốn học sinh đã làm xong ! Vì sao các bạn đó làm nhanh như thế ? Thì ra bốn học sinh đó đã vứt bỏ thói quen so sánh từng cặp phân số mà trước hết đã biến đổi chúng thành các phân

Cách giải 1 . $1 \leq a - b \leq 2$ (1), $2 \leq a + b \leq 4$ (2)

Lấy $3 \times (1) + (2)$ ta được $5 \leq 4a - 2b \leq 10$ tức $5 \leq f(-2) \leq 10$.

Cách giải 2 : từ $f(x) = ax^2 + bx$ được $f(-1) = a - b$.

$f(1) = a + b$. Liên kết lại với nhau để giải sẽ được

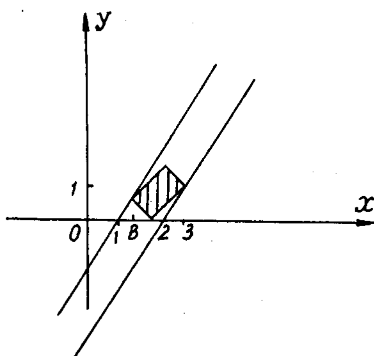
$$a = \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)], \quad b = \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)].$$

Do đó $f(-2) = 4a - 2b = 2[f(1) + f(-1)] - [f(1) - f(-1)] = f(1) + 3f(-1)$. Đề bài giả thiết $1 \leq f(-1) \leq 2$, $2 \leq f(1) \leq 4$ ta có $2 + 3 \times 1 \leq f(1) + 3(f-1) \leq 4 + 3 \times 2$ tức $5 \leq f(-2) \leq 10$.

Cách giải 3.

Từ $\begin{cases} a - b - 1 = 0 \\ a + b - 2 = 0 \end{cases}$ được giao điểm A của hai đường thẳng là $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Từ $\begin{cases} a - b - 2 = 0 \\ a + b - 4 = 0 \end{cases}$ được giao điểm C (3, 1).

Lại vì $f(-2) = 4a - 2b$. Đặt $t = 4a - 2b$ tức $4a - 2b - t = 0$. Đồ thị của chúng là một họ đường thẳng có độ dốc bằng 2. Việc tìm phạm vi lấy trị của $f(-2)$ mà trị này lại bị sự phụ thuộc lẫn nhau của a, b trong điều kiện bài toán ràng buộc. Vấn đề có thể được giải quyết thông qua tìm trị tung độ lớn nhất của giao điểm giữa đường thẳng $4a - 2b - t = 0$ với hình chữ nhật có kẻ gạch. Từ hình 27 – 3 có thể thấy khi qua điểm A $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ giao



Hình 27 – 3

điểm $-\frac{t}{2}$ lớn nhất, trị t nhỏ nhất, trị nhỏ nhất là $4a - 2b =$ $4 \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 5$. Khi qua điểm C (3,1) điểm cắt $-\frac{t}{2}$ nhỏ nhất, trị t lớn nhất, trị lớn nhất là $4a - 2b = 4 \times - 2 \times 1 = 10$.

Cho nên $5 \leqslant f(-2) \leqslant 10$.

Cuối cùng bạn học sinh ấy đã phân tích, so sánh ba cách giải trên, chỉ ra cách giải 1 tính toán đơn giản ; cách giải ba trực quan rõ ràng nhưng cũng bị giới hạn cục bộ ; cách giải hai giá trị của a và b được dùng biểu thức bậc nhất của f(1) và f(-1) để biểu thị, nêu lên đầy đủ quan hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa a và b, cách diễn đạt chính xác, phạm vi ứng dụng rộng rãi.

Từ ví dụ trên ta có thể thấy, sự tiếp tục suy nghĩ là rất cần thiết, rất có hiệu quả. Giải xong vẫn suy nghĩ tiếp thực tế là một lần học lại, là một khâu quan trọng trong chuỗi xích xây dựng kiến thức mới.

27 - KHÔNG NGỪNG KHẮC PHỤC ẢNH HƯỞNG TIÊU CỰC CỦA THÓI QUEN TÂM LÝ

Một lần thầy giáo ra cho tám mươi em học trò lớp sáu một đề bài : So sánh các phân số sau $\frac{10}{17}, \frac{12}{19}, \frac{15}{23}, \frac{20}{33}, \frac{60}{37}$ và dùng dấu < để lần lượt xếp chúng từ nhỏ đến lớn, xem ai tìm ai nhanh nhất ? Ba phút trôi qua, khi nhiều học sinh còn hòa đồng mẫu số thì có bốn học sinh đã làm xong ! Vì sao các bạn đó làm nhanh như thế ? Thì ra bốn học sinh đó đã vứt bỏ thói quen so sánh từng cặp phân số mà trước hết đã biến đổi chúng thành các phân

số có tử số bằng nhau rồi so sánh mẫu số. Dễ dàng biết được bội số chung nhỏ nhất của tử số là 60. Do đó $\frac{10}{17} = \frac{60}{102}$, $\frac{12}{19} = \frac{60}{95}$, $\frac{15}{23} = \frac{60}{92}$, $\frac{20}{33} = \frac{60}{99}$ và $\frac{60}{37}$. Rõ ràng $\frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{12}{19} < \frac{15}{33} < \frac{60}{37}$.

Phương pháp này hay quá ! Thế thì có phải những học sinh khác không biết cách này ? Tất nhiên là không phải. Rất nhiều học sinh đã bị ảnh hưởng của phương pháp cũ rất sâu nên không bứt ra khỏi sự ràng buộc của thói quen tư duy cũ để mở ra một hướng suy nghĩ mới.

Thói quen tâm lý là một trở ngại tâm lý thường gặp trong học tập. Nguyên nhân hình thành thói quen tâm lý có nhiều mặt, trong đó nguyên nhân chủ yếu là tư duy của người ta có tính phương hướng. Một loại kiến thức hoặc phương pháp nào đó dùng nhiều lần, ấn tượng sâu rồi sẽ thành thói quen tâm lý. Ví dụ, trước kia khi làm bài tập về đơn giản phép tính thì luôn biến nó thành phép chia, tức là luôn xét nó dưới góc độ tính toán, lên cấp hai học sinh không quen dùng phương pháp mới tức là đứng trên tính chất phép tính mà xét. Thực ra phương pháp mới này là phương pháp phổ biến và nhanh gọn hơn. Ví dụ tính.

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}.$$

Lợi dụng tính chất cơ bản của phân số, ta nhân cả tử và mẫu số với $2 \times 3 \times 4$ được.

$$\text{Phép tính ban đầu} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times 2 \times 3 \times 4}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times 2 \times 3 \times 4 \times - 1} =$$

$$= \frac{12 + 8 - 6}{12 + 8 - 6 - 1} = 1\frac{1}{13}$$

Nếu nhận thức ngừng lại ở bề mặt, không thạo quan sát phân tích đặc điểm của vấn đề, đó lại là một nguyên nhân nữa để hình thành thói quen tâm lý. Như giải phương trình bậc hai một ẩn số $\sqrt{2}(2x-1)^2 - x + \frac{1}{2} = 0$. Nếu chỉ quan sát trên bề mặt thì ta sẽ chỉ nghĩ đến đơn giản nó thành phương trình bậc hai thông thường $4\sqrt{2}x^2 - (4\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 0$ và tìm nghiệm theo công thức quen thuộc.

$$x = \frac{(4\sqrt{2}+1) \pm \sqrt{(4\sqrt{2}+1)^2 - 4\times 4\sqrt{2}(\sqrt{2}+\frac{1}{2})}}{1 \times 4\sqrt{2}}$$

$$= \ldots$$

Nhưng có học sinh không làm thế, khi quan sát họ chú ý đến giữa các hệ số hình thành tỉ lệ và biến đổi đơn giản các hệ số sẽ được dạng phương trình $a(x+b)(x+c) = 0$

$$\sqrt{2}(2x-1)^2 - \frac{1}{2}(2x-1) = 0$$

$$(2x-1)\left[\sqrt{2}(2x-1) - \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$2x - 1 = 0 \text{ hoặc } \sqrt{2}(2x-1) - \frac{1}{2} = 0$$

Trường hợp tương tự như thế rất nhiều.

Thói quen tâm lý là một thứ tiêu cực, nó làm cho tư duy của ta cứng nhắc, bảo thủ. Đúng như nhà khoa học Becna Pháp đã nói : "Tạo nên trở ngại lớn nhất trong học tập của chúng ta là những điều ta đã biết chứ không phải những điều chưa biết".

Để phát triển năng lực tư duy logic, ta không nên thỏa mãn ở mức biết giải quyết vấn đề đúng mà phải biết trên cơ sở có phát

huy tính sáng tạo, vận dụng tri thức một cách linh hoạt để giải quyết hợp lý các vấn đề mới.

Khắc phục thói quen tâm lý như thế nào ? Ta có thể bắt đầu từ rèn luyện ba mặt sau :

1. So sánh các cách giải khác nhau để hiểu sâu sắc cách vận dụng hợp lý kiến thức

Ví dụ tính $\left|175\frac{7}{36} - 389\frac{5}{17}\right| - 224\frac{29}{36}$. Giải theo thói quen thông thường là : đầu tiên tính giá trị dấu tuyệt đối :

Phép tính ban đầu =

$$= \left| -214\frac{61}{612}\right| - 224\frac{29}{36} = 214\frac{61}{612} - 224\frac{493}{612} = -10\frac{12}{17}$$

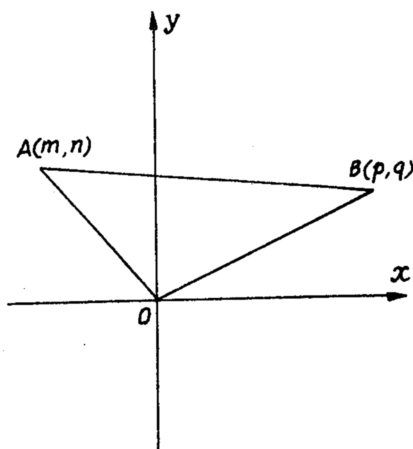
Còn một cách không giải theo thói quen là căn cứ định nghĩa trị tuyệt đối để bỏ dấu tuyệt đối.

Phép tính ban đầu =

$$389\frac{5}{17} - 175\frac{7}{36} - 224\frac{29}{36} =$$

$$= 389\frac{5}{17} - 400 = -10\frac{12}{17}$$

So sánh ưu thế về hai cách giải : Giải theo thói quen phải hòa đồng mẫu số hai lần, cuối cùng còn phải biến đổi phân số ra hỗn số, tức lượng tính toán nhiều ; còn dùng cách không theo thói quen thì tính toán đơn giản.



Hình 28 – 1

2. Quan sát tỉ mỉ và chú ý tìm ra đặc điểm của vấn đề

Các cách giải hay đều gắn liền với việc nắm vững đặc điểm của đề bài. Đối với đề bài đơn giản, có thể nhìn ra đặc điểm ngay. Đối với bài khó hoặc đặc điểm ẩn sâu thì phải quan sát kỹ và chú ý đầy đủ. Do đó nhất định phải bồi dưỡng thành thói quen quan sát tỉ mỉ.

Ví dụ giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = abx + 1 \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = aby + 1 \end{cases}$

Đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số. Theo cách giải thông thường, có thể giải theo phương pháp cộng hoặc phương pháp thế. Vì hệ số của ẩn số là phân số nên quá trình giải rất phức tạp.

Bây giờ ta từ góc độ hàm số để phân tích đặc điểm của hệ phương trình. Rõ ràng mỗi phương trình xác định một hàm số bậc nhất. Vì vị trí của x và y trong hai phương trình luân phiên nhau nên hai hàm số bậc nhất là hàm số ngược của nhau nên việc giải hệ phương trình trở thành việc tìm giao điểm đồ thị của hai hàm số ngược nhau. Từ đặc điểm của hàm bậc nhất có thể biết giao điểm ở trên đường thẳng $y = x$. Trong hệ phương trình đã cho, đặt $x = y$ là được.

$$x = y = \frac{ab}{a + b - a^2b^2}$$

Ví dụ khác, chứng minh nếu $m, n, p, q \in R$ thì

$$\sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{p^2 + q^2} \geq \sqrt{(m - p)^2 + (n - q)^2}.$$

Bài này nếu dùng cách giải đại số thì rất phiền phức, khó khăn. Nếu liên hệ với công thức khoảng cách hai điểm trong mặt phẳng tức là từ góc độ hình học để hiểu bất đẳng thức thì vấn đề sẽ trở nên rất rõ ràng. Lấy hai điểm A, B bất kỳ trong tọa độ vuông góc,

giả thiết có A (m, n), B(p, q), nối OA, OB. Trong tam giác AOB vì $|OA| + |OB| \geqslant |AB|$, tức công thức khoảng cách hai điểm ta được.

$$\sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{(m - p)^2 + (n - q)^2}$$

3. Chăm suy nghĩ, tích cực tìm tòi cách giải ngắn gọn

Khi mới bắt đầu học một kiến thức mới, thầy giáo thường yêu cầu ta tuân theo phương pháp và các bước nào đó để giải bài tập. Mục đích là muốn ta thành thạo nắm vững kiến thức mới. Nhưng ta không thể cứ làm mãi loại bài đơn giản như thế. Khá nhiều đề phức tạp, nhất là loại đề tổng hợp thì ít có một phương pháp có sẵn để dùng. Do đó đòi hỏi ta phải chăm suy nghĩ tìm ra cách giải ngắn gọn. Cách giải chặt chẽ, ngắn gọn đạt đến tinh tế là vẻ đẹp của toán.

Biết $a = \sqrt{17} - 1$.

Tìm trị của $(a^5 + 2a^4 - 17a^3 - a^2 + 18a - 17)^{1997}$

Nếu ta trực tiêp thay a vào thì sẽ thấy ngay lượng tính toán rất lớn. Do đó phải thoát khỏi đường mòn, tìm cách giải ngắn gọn. Dễ thấy rằng $a = \sqrt{17} - 1$ có thể biến đổi thành $a + 1 = \sqrt{17}$. Điều đó gợi cho ta biến đổi biểu thức trên thành phép lũy thừa có dạng cơ số là a + 1. $(a^5 + 2a^4 - 17a^3 - a^2 + 18a - 17)^{1997} =$

$$= [(a + 1)^5 - 3(a + 1)^4 - 15(a + 1)^3 + 52(a + 1)^2 - 14(a + 1)]^{1997} =$$

$$= [259\sqrt{17} - 225\sqrt{17} - 34\sqrt{17} - 1]^{1997} = -1$$

Ví dụ khác, giải phương trình : $(x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 5x - 1) =$

$$= (x^2 + 5x + 3)(2x^2 - 5x - 1)$$

Thói quen thông thường là nhân các số hạng với nhau, sau đó mới đơn giản rồi giải. Như thế sẽ rất phiền phức.

Chú ý đến đặc điểm hệ số hai bên của phương trình, ta nhớ đến cách hạ cấp phương trình, dùng phương pháp xác định hệ số để giải.

Đặt $x^2 + 3 = a$, $2x^2 - 1 = b$. Phương trình đã cho đổi thành.

$(a - 5x)(b + 5x) = (a + 5x)(b - 5x)$. Đơn giản được

$ab - 5(a - b)x = ab + 5(b - a)x$.

$x(a - b) = 0$, $x_1 = 0$

Vì $a - b = 0$ được $x^2 - 4 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Cũng có học sinh đặt $a = x^2 - 5x + 3$, $b = 2x^2 + 5x - 1$ lúc đó

$x^2 + 5x + 3 = a + 10x$, $2x^2 - 5x - 1 = b - 10x$.

Cho nên $ab = (a + 10x)(b - 10x)$

Sau khi rút gọn được $10(b - a)x - 100x^2 = 0$

$x_1 = 0$, $b - a = 10x$ đơn giản đi, tức là $x^2 - 4 = 0$ nên

$x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Cũng có học sinh giải cách khác, từ dạng tích biến đổi thành dạng tỉ lệ.

$$\frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 + 5x + 3} = \frac{2x^2 - 5x - 1}{2x^2 + 5x - 1}$$

Dùng định lý tính chất tỉ lệ $\left(\frac{b}{a} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}\right)$ được

$$\frac{2x^2 + b}{-10x} = \frac{4x^2 - 2}{-10x}, \quad \frac{x^2 + 3}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

nên $x(x^2 + 3) = x(2x^2 - 1)$, $x(x^2 - 4) = 0$

nên $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Các cách giải trên đây ngắn gọn hơn nhiều so với cách nhân các số hạng với nhau để giải, nhất là cách giải thứ ba hướng suy nghĩ mới mẻ, độc đáo, ngắn gọn nhất.

Tóm lại, qua nỗ lực rèn luyện không mệt mỏi thì thói quen tâm lý sẽ từng bước được khắc phục. Quá trình khắc phục đó chính là quá trình đi tìm cách giải ngắn gọn, là quá trình tìm kiếm vẻ đẹp toán học, thúc đẩy tư duy biến đổi linh hoạt, năng lực tư duy không ngừng phát triển.

28 - PHẢI HỌC TOÁN MỘT CÁCH SÁNG TẠO

Trong quá trình học toán, thường biểu hiện ra hai mức học khác nhau. Loại thứ nhất là học với tính bắt chước, biểu hiện ở chỗ dựa vào thầy lên lớp và phụ đạo để học và nắm kiến thức, theo những cách giải hiện có để làm bài tập. Loại thứ hai là học một cách sáng tạo, học sinh nắm kiến thức một cách độc lập, sáng tạo, linh hoạt vận dụng những kiến thức đã có để giải quyết hoặc phát hiện vấn đề mới.

Học tập tất nhiên thường bắt đầu từ bắt chước, nhưng lại không thể chỉ có bắt chước mà phải từ học biết toán chuyển sang biết học toán, phải học toán một cách sáng tạo.

Tư duy sáng tạo là hạt nhân của học tập sáng tạo.

Tư duy sáng tạo là chỉ người ta trong quá trình giải quyết vấn đề đã hoạt động tư duy đem lại được thành quả mới có giá trị cho bản thân hoặc xã hội.

Sự mới mẻ là tiêu chí rõ nhất của tư duy sáng tạo. Không những thành quả mới mẻ, có ích mà cả quá trình tư duy cũng mới mẻ. Nó biểu hiện trong quá trình tư duy phải chuyển đổi quan điểm và khắc phục thói quen phương thức tư duy.

Tư duy sáng tạo chia làm hai loại : một loại là tư duy sáng tạo của các nhà khoa học, nhà phát minh, nghệ sĩ kiệt xuất. Những tư tưởng mới, tác phẩm mới do họ làm ra đối với xã hội loài người là xưa nay chưa hề có, là có tính mở đường. Còn loại nữa là tính tư duy sáng tạo, cách nghĩ mới, sản phẩm mới, tuy đối với xã hội hoặc người khác không mới, nhưng đối với bản thân họ là mới, là chưa từng có, nó có ý nghĩa đối với sự phát triển của bản thân. Ví dụ trong làm bài tập, có học sinh độc lập suy nghĩ, tìm ra cách giải thầy chưa hề giảng, đó là tư duy sáng tạo rất có ý nghĩa đối với sự phát triển của bản thân. Đương nhiên, giữa hai loại tư duy sáng tạo này không có ranh giới phân cách rõ ràng. Loại tư duy thứ hai nếu được phát triển liên tục, có thể có khả năng đạt đến trình độ của loại trước. Mỗi học sinh chỉ cần cố gắng học tập, động não tích cực thì đều có thể phát huy tính sáng tạo. Do đó có thể mạnh dạn nói rằng ai cũng có khả năng sáng tạo.

Tri thức có vai trò quan trọng đối với tư duy sáng tạo. Nó vừa là nguồn lực, vừa là kim chỉ nam của sáng tạo. Hoạt động sáng tạo đòi hỏi tri thức chuyên môn của các bộ môn (như thuật toán, đại số, hình học, tam giác lượng....) và phương pháp giải quyết vấn đề. Bồi dưỡng năng lực tư duy sáng tạo chính là đòi hỏi học sinh biến quá trình đơn thuần tiếp thu kiến thức trong học tập thành quá trình sáng tạo lại. Toán học ở phổ thông là một hệ thống kiến thức hoàn chỉnh được cấu thành bởi bốn mặt : các khái niệm, lý luận, phương pháp và sự vận dụng. Muốn học tập sáng tạo phải bồi dưỡng tính tư duy sáng tạo trên hai mặt học tập lý luận (các khái niệm, nguyên lý) và cách giải quyết vấn đề.

1. Tích cực tìm tòi, phát hiện tri thức mới

Những định nghĩa, nguyên lý, định lý, công thức hoặc qui tắc trong sách giáo khoa ngày nay đều là kết tinh trí tuệ sáng tạo từ mấy trăm năm, thậm chí mấy nghìn năm lại đây của các nhà toán học. Rất nhiều định lý, công thức quan trọng hoặc những chứng

minh điển hình đều là mẫu mực của tư duy sáng tạo. Tính quan trọng của phương pháp chứng minh của họ không kém bản thân định lý. Do đó, trong học toán, phải tích cực tìm tòi, dũng cảm phát hiện, làm cho mình giống như đang ở trong vị trí hoạt động nghiên cứu khoa học, tìm tòi bí mật, giống như một nhà toán học đang đi khai phá chân trời mới cho ngành toán. Qua phát hiện vấn đề, thu được kiến thức mới và hiểu sâu ý nghĩa của phương pháp đó, từ trong phát hiện mà học cách phát hiện. Ta phải tự mình tạo ra con đường đi đến lâu đài tri thức mới chứ không nên chỉ quen đi theo người khác.

Ví dụ khi giảng về "tổng ba góc trong của tam giác" thầy giáo yêu cầu học sinh dùng thước đo độ hoặc dùng phương pháp nào đó để đoán trước xem tổng ba góc tam giác là bao nhiêu độ ? Qua đó, tính toán, cắt ba góc ghép lại, mọi người sẽ đoán tổng ba góc trong là 180°. Sau đó học sinh theo gợi ý của thầy đi chứng minh phán đoán đó.

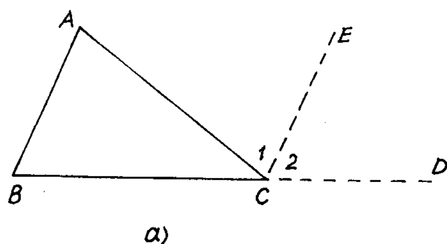
Đây quả thật là dịp tốt để mầy mò phát hiện. Học sinh động não suy nghĩ. Các em bắt đầu từ kết luận 180°, liên tưởng đến tri thức có liên quan với 180° : góc bẹt bằng 180°, do đó vẽ thêm các đường thẳng bổ trợ, cuối cùng là kết ba góc trong lại với nhau làm thành góc bẹt. Một chốc sau, chúng tìm được có năm cách chứng minh. Ta ghi lại các hướng chính của sự suy nghĩ đó.

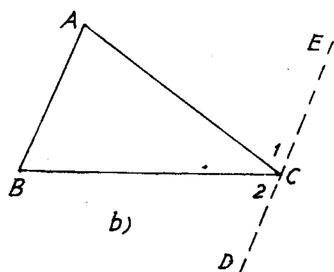
Chứng minh 1. Kéo dài BC đến D, qua điểm C vẽ CE // AB. Ta có $\hat{1} = \hat{A}$, $\hat{2} = \hat{B}$ (hình 29 - 1a). Nên

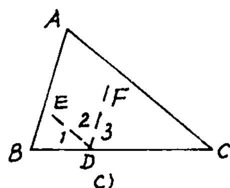
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{1} + \hat{2} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

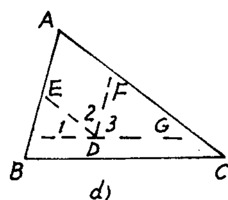
Chứng minh 2 . Qua điểm C vẽ DE // AB, ta có : $\hat{1} = \hat{A}$, $\hat{2} = \hat{B}$ (hình 29 - 1b), nên

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{1} + \hat{2} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$









Hình 29 – 1

Chứng minh 3 : Qua điểm D trên BC vẽ DE //AC, DF //AB. Ta có $\hat{1} = \hat{C}$, $\hat{2} = \hat{A}$, $\hat{3} = \hat{B}$ hình 29 – 1c) , nên

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{2} + \hat{1} + \hat{3} = 180^o$$

Chứng minh 4 . Qua điểm D trong tam giác ABC vẽ DG //BC, DE //AC, DF//AB. Ta có $\hat{1} = \hat{C}$, $\hat{2} = \hat{A}$, $\hat{3} = \hat{B}$ (hình 29 – 1d). Nên

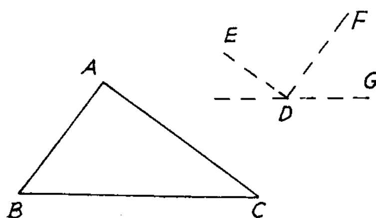
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{2} + \hat{3} + \hat{1} = 180^o.$$

Chứng minh 5 . Qua 1 điểm D ngoài tam giác ABC vẽ DG// BC, DE//AC, DF//AB (hình 29 –1e)

Ta có

$\hat{1} = \hat{B}$, $\hat{2} = \hat{A}$,

$\hat{3} = \hat{C}$.



Hình 29 – 1e

Nên $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{2} + \hat{1} + \hat{3} = 180^\circ$.

Những học sinh đã học qua phần này đều biết, ngoài một cách chứng minh giống như trong sách giáo khoa ra, bốn cách còn lại trong sách không có. Bất kể là cách chứng minh nào, chỉ cần học sinh tự mình nghĩ ra đều là tư duy sáng tạo.

Muốn bồi dưỡng tính sáng tạo cho mình thì vừa phải học trong sách, vừa không mê tín sách, không mê tín quyền uy. Một em học sinh cấp hai trường Bắc Kinh số 8, sau khi nghe thầy chứng minh các vòng tròn đồng tâm nội và ngoại tiếp đa giác đều n cạnh bằng phương pháp tam giác bằng nhau thì cảm thấy phương pháp trong sách rất phức tạp. Do đó tự mình tìm tòi nghĩ ra phương pháp chứng minh vô cùng đơn giản.

Như hình 29 – 2, đa giác n cạnh $A_1, A_2A_3 \ldots A_n$. Nối A_nA_2, A_1A_3, qua A_n, A_1, A_2 vẽ vòng tròn 0.

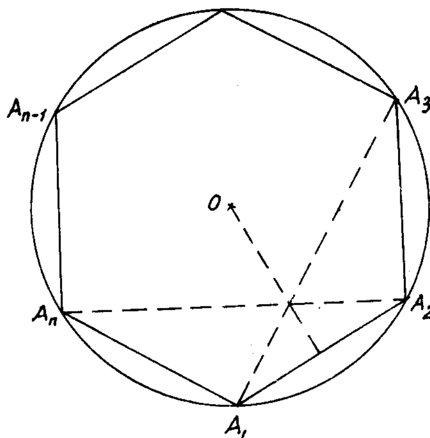
$A_nA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$;

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$A_1 \hat{A}_n A_2 = \dfrac{180^\circ - \hat{A}_1}{2}$,

$A_1 \hat{A}_3 \hat{A}_2 = \dfrac{180^\circ - \hat{A}_2}{2}$ nên

$A_1A_nA_2 = A_1 \hat{A}_3A_2$, do đó



Hình 29 – 2

bốn điểm A_n, A_1, A_2, A_3 cùng trên đường tròn, nên A_3 ở trên đường tròn tâm O.

Tương tự ta cũng chứng minh được A_4 nằm trên vòng tâm O, $A_5 \ldots A_{n-1}$ đều ở trên đường tròn tâm O. Cho nên vòng tròn tâm O là vòng tròn ngoại tiếp của đa giác n cạnh.

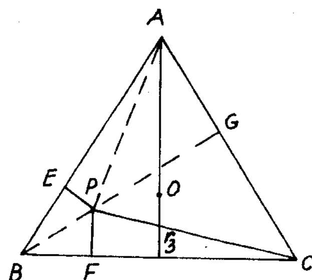
Tiếp theo, có vòng tròn O ngoại tiếp, khoảng cách từ tâm vòng tròn đến các cạnh của đa giác đều bằng nhau, tức là nói, lấy O làm tâm, lấy khoảng cách từ O đến các cạnh làm bán kính ta sẽ có vòng tròn nội tiếp của đa giác.

Lợi dụng bốn điểm cùng đường tròn để chứng minh điểm thứ tư nằm trên đường tròn do ba điểm kia xác định, từ đó chứng minh đa giác đều nhất định có vòng tròn ngoại tiếp, cách nghĩ này rất hay.

Ngoài việc tìm kiếm những cách giải mới, còn có thể tiến thêm một bước mở rộng đề bài đã giải : từ trường hợp riêng mở rộng ra trường hợp chung sẽ xuất hiện kết quả gì ?

Ví dụ : chứng minh tổng các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trong tam giác đến ba cạnh bằng ba lần khoảng cách từ tâm vòng tròn ngoại tiếp đến một cạnh của tam giác.

Bài này rất nhiều phương pháp chứng minh, dùng phương pháp diện tích để chứng minh rất đơn giản. Ví dụ, hình 29-3, nối PA, PB, PC.



Hình 29–3

Giả thiết cạnh tam giác đều là a, khoảng cách tâm của cạnh là r_3. Ta có :

$$S_{\Delta ABP} + S_{\Delta BCP} + S_{\Delta CAP} =$$

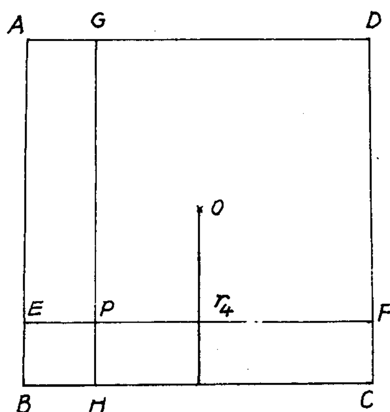
$$= \frac{1}{2}PE \times a + \frac{1}{2}PF \times a + \frac{1}{2}PG \times a = \frac{1}{2}(PE + PF + PG) \times a$$

Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AD \times a = \frac{1}{2} \times 3r_3 \times a = \frac{3}{2}r_3a$

Nên $\frac{1}{2}(PE + PF + PG) \times a = \frac{3}{2}r_3a$. Do đó :

$$PE + PF + PG = 3r_3.$$

Bây giờ ta xét hình vuông. Như hình 29 - 4 dễ thấy "tổng các khoảng cách từ bất cứ điểm nào trong hình vuông đến bốn cạnh đều gấp 4 lần khoảng cách tâm đến cạnh ".



Hình 29 - 4

Chúng ta phát hiện số cạnh của đa giác đều bằng bội số của khoảng cách từ tâm đến cạnh. Do đó ta đoán : tổng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trong đa giác đều đến các cạnh bằng n lần khoảng cách từ tâm đến cạnh.

So sánh phương pháp chứng minh cho tam giác đều rất dễ chứng minh phán đoán trên là đúng. Từ tam giác đều đến đa giác đều n cạnh, ta phát hiện ra một kết luận chung hơn.

Dưới đây cử một ví dụ nữa. Trong hình học không gian có đề toán như sau : Trong hình chóp P - ABC, biết PA ⊥, BC, PB = BC = l, đường thẳng vuông góc chung của PA, BC là ED = h. Chứng minh thể tích của hình chóp P - ABC là $V = \frac{1}{6}l^2h$.

Mời bạn đọc tự chứng minh. Bây giờ ta nghiên cứu sâu thêm một bước : nếu biến đổi quan hệ giữa PA và BC, thì rút ra được kết luận gì ?

Mở rộng : Giả thiết một cặp cạnh dài đối nhau của tứ diện là a, b, và khoảng cách của chúng là h, góc kẹp của chúng là α, vậy thể tích của tứ diện này là $V = \frac{1}{6} absin\alpha$

Đi sâu thêm, ta có thể được hai hệ quả.

Hệ quả 1 : Tất cả các tứ diện có hai cạnh có độ dài cho trước và nằm trên hai đường thẳng cố định thì thể tích của chúng đều bằng nhau.

Hệ quả 2 . Có ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng, trên a lấy một đoạn BC, trên b, c lấy điểm A và P thì cho dù A và P ở vị trí nào trên b, c đều có thể tích của tứ diện ABCP không đổi.

Đối với những vấn đề đã được giải quyết, tiến thêm một bước nghiên cứu và mở rộng sẽ phát hiện được con đường quan trọng để thu được tri thức mới. Những học sinh thích thú về điều đó nên thử xem.

2. Giải quyết vấn đề một cách sáng tạo

Học để dùng, muốn học tốt toán một cách sáng tạo, trong giải quyết vấn đề còn cần phải cố gắng sáng tạo, không ngừng tìm phương pháp mới. Phương pháp tốt hay xấu, hay hoặc dở đối với giải quyết vấn đề rất quan trọng. Trong lịch sử phát triển toán học, nhờ cải tiến hay những biến đổi có tính đột phá về phương pháp mà đã thúc đẩy sự biến đổi sâu sắc thêm của toán học. Những sự kiện thúc đẩy toán học phát triển như thế có rất nhiều.

Lấy ngay việc giải ba đề khó về hình học sơ cấp do người cổ Hy lạp (từ thế kỉ 6 đến thế kỷ 4 trước công nguyên) nêu ra, đó là : chia góc bất kỳ thành ba phần đều nhau, vấn đề bội tích lập phương và biến đổi hình tròn về hình vuông. Rất nhiều nhà toán học phát hiện thấy dùng thước không chia góc bất kỳ thành ba

phần đều nhau được. Qua nhiều lần thất bại khiến các nhà toán học tự hỏi : mình không vẽ được hay căn bản dùng thước không thể vẽ được ? Họ ý thức được, đây có lẽ là vấn đề dùng thước không thể vẽ được. Song toán học là môn khoa học trừu tượng và nghiêm ngặt, làm thế nào để dùng lý luận chứng minh phát hiện này. 2000 năm đã trôi qua nhưng ba bài toán cổ đó vẫn còn là sự thách đố đối với trí tuệ của các nhà toán học.

Năm 1637, nhà triết học kiêm toán học Pháp, Đề-các đã cho ra đời cuốn sách "Hình học". Ông đã nhìn ra tiềm lực to lớn của môn đại số với tư cách là một phương pháp khoa học chung. Trong sách ông đã đem đại số ứng dụng vào hình học, sáng lập ra môn toán học mới - hình học giải tích. Hình học giải tích đã thay đổi bộ mặt của toán học. Sự sáng lập đó đã đặt nền tảng cho toán học biến số về sau này, là cái mốc quan trọng trong lịch sử phát triển của toán học. Nó đã thúc đẩy sự phát triển to lớn của toán học từ thế kỷ 17 trở đi, đồng thời cũng là bước ngoặt giải quyết ba bài toán khó bằng dùng thước vẽ hình.

Sau đó khoảng 200 năm, những năm 30 của thế kỷ 19, nhà toán học trẻ tuổi nước Pháp Galoa (1811 - 1832) đã sáng lập ra một lý luận và phương pháp mới của toán học - lý thuyết bầy. Từ đó về sau các nhà toán học đã vận dụng lý luận và phương pháp của ông công phá được thành lũy ba bài toán khó mà đã phấn đấu 2500 năm nay để giải, hơn nữa lại giải được một cách dễ dàng và đầy sức thuyết phục. Dùng lý luận của Galoa không những giải quyết được vấn đề dùng thước không thể vẽ được mà còn giải rất đẹp "những phương trình đại số bậc năm trở lên không thể có nghiệm chung chung" và định lý vẽ đa giác đều nhiều cạnh của Gaoxơ. Ngày nay, lý thuyết bầy của ông không còn là vấn đề đơn thuần thuộc phạm vi toán học nữa. Bắt đầu từ những năm 20 của thế kỷ 20 này, các nhà vật lý và hóa học đã vận dụng phương pháp lý thuyết bầy phát hiện ra kết cấu của nguyên tử và phân tử. Lý thuyết bầy đã trở thành công cụ đắc lực của vật lý và hóa học hiện đại.

Đối với học sinh mà nói, tuy rất khó sáng tạo ra được những lý luận và phương pháp mới có ý nghĩa to lớn như các nhà toán học, nhưng chúng ta vẫn phải bắt đầu từ những điều nhỏ nhặt. Khi giải quyết mỗi vấn đề, nhất là khi gặp đề toán khó không nên nghĩ làm ra được là xong mọi chuyện mà phải nghĩ xem còn có cách giải nào hay hơn nữa không ? Phải huy động toàn bộ trí tuệ để giải quyết vấn đề một cách sáng tạo.

Muốn giải quyết sáng tạo phải liên tưởng rất rộng. Phương thức liên tưởng được nhiều nhất là liên tưởng so sánh, tức là từ các sự vật tương tự liên tưởng đến những tính chất tương tự. Một khi bạn đã nắm vững nó thì tri thức phong phú của bạn sẽ trở nên thần thông quảng đại, độ nhạy cảm của tư duy sáng tạo sẽ lóe sáng trong đầu óc bạn.

Nêu một ví dụ : Trong bốn số dương khác nhau a, b, c, d, số a lớn nhất, d nhỏ nhất và a : b = c : d . Mối quan hệ lớn bé ra sao của a + d và b + c ? Và chứng minh kết luận của bạn.

Đây là vấn đề mang tính chất chung. Ta dùng phương pháp tư duy từ chung chung đưa về cụ thể để tìm kết luận.

Viết hai tỉ lệ cụ thể : 1) $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, trong đó a = 10, b = 8, c = 5 , d = 4. Ta có a + d = 10 + 4 = 14, b = c = 8 + 5 = 13.

Nên a + d > b + c ; 2) $\frac{100}{76} = \frac{25}{19}$, trong đó a = 100, b = 76, c = 25 , d = 19 . Tương tự a + d > b + c.

Từ 1) và 2) ta phán đoán, nói chung a + d > b + c .

Làm sao để chứng minh được a + d > b + c ? Tự nhiên ta nghĩ đến phương pháp đại số.

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ từ a lớn nhất, d nhỏ nhất ta biết k > 1 và b,c > d, do đó a = kb, c = kd.

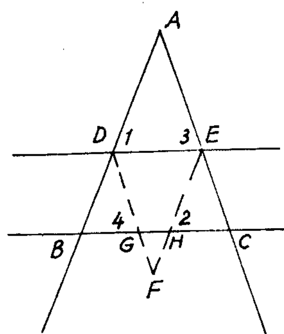
Nên (a + d) – (b + c) = (kb + d)– (b + kd)

$= (k - 1) b - (1 - k) d = (k - 1) (b - d) > 0$

Nên a + d > b + c.

Rất nhiều học sinh khi giải đề này không thỏa mãn chỉ dùng một phương pháp, họ nghĩ đến kết hợp số và hình, dùng tính chất hình học để nói rõ tính chất số học, liên tưởng đến nhiều mặt của hình học đã sáng tạo ra phương pháp chứng minh độc đáo.

So sánh với định lý đoạn thẳng tỉ lệ của hai đường thẳng song song ta được cách chứng minh 2. Như trên hình 29 – 5, ta có hai đường thẳng song song DE và BC cắt hai đường thẳng giao nhau AB và AC tại các điểm D, E và B, C, C và AE = a, AD = b, EC = c , DB = d, trong đó a lớn nhất, d nhỏ nhất. Lúc đó sẽ trở thành phải chứng minh AE + DB > AD + EC.



Hình 29 – 5

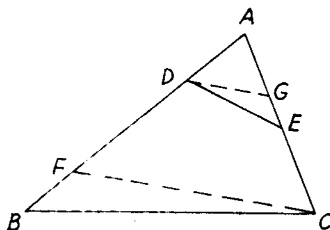
Ta vẽ hình bình hành ADFE, DF và EF cắt BC ở G và H. Ta có :

$\hat{1} = \hat{2}$, $\hat{3} = \hat{4}$. Vì AE > AD, nên $\hat{1} > \hat{3} \Rightarrow \hat{2} > \hat{4}$ nên GF > HF. Lại vì AD + DF = AE + EF nên AD + DG < AE + FH.

Vì DBHE và DGCE là hai hình bình hành nên EH = DB, DG = EC. Cho nên AD + EC < AE + DB tức a + d > b + c.

Nếu so sánh với tam giác đồng dạng ta sẽ được cách chứng minh 3.

Như hình 29 - 6 đã vẽ tam giác ABC đồng dạng với tam giác AED, trong đó AB = a, AC = b, AE = c, AD = d. Vấn đề trở thành chứng minh AB + AD > AC + AE .



hình 29- 6

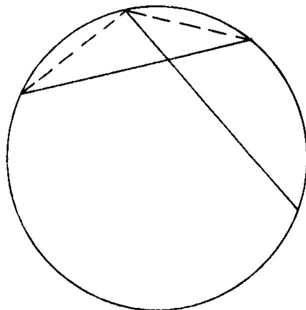
Trên đoạn AC lấy AG = AD, trên AB lấy AF = AC, nối BG , CF thì GE = b - d, BF = a - c.
Từ Δ DEG ~ Δ CBF ta chứng minh được :

$$\frac{GE}{BF} = \frac{DE}{BC} < 1 \text{ tức là } \frac{AE - AD}{AB - AC} < 1. \text{ Cho nên}$$

$$AB + AD > AC + AE \text{ tức là } a + d > b + c.$$

Từ a : b = c : d ⇒ ad = bc. So sánh với định lí dây cung cắt nhau ta được cách chứng minh thứ tư.

Cho hình vẽ như 29 -7. Giả thiết hai dây cung AB, CD cắt nhau ở E và EB = a, AE = d, EC = b, ED = c. Vấn đề trở thành phải chứng minh AB > CD.


Hình 29- 7

Nối AC và AD. Vì ED > AE nên $\overset{\frown}{AED} > \overset{\frown}{EDA}$, do đó $\overset{\frown}{BD} > \overset{\frown}{AC}$, nên $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DB} > \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AC}$ hoặc $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BD} > \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC}$ nên $\overset{\frown}{ADB} > \overset{\frown}{CAD}$ hoặc $\overset{\frown}{DBC} > \overset{\frown}{ACB}$ do đó AB > CD tức a + d > b + c .

Trên đây là mấy ví dụ về tư duy sáng tạo giải đề toán cấp hai.

Tương tự, trong toán cấp ba cũng có rất nhiều ví dụ sinh động về tư duy sáng tạo. Tóm lại hoạt động sáng tạo là một dạng lao động trí óc và mài luyện ý chí gian khổ, nó đòi hỏi người ta phải có khát vọng cháy bỏng về hiểu biết và lòng say mê sáng tạo mãnh liệt. Nhát gan và thiếu tự tin là kẻ thù của sáng tạo. Để học toán một cách sáng tạo, các bạn học sinh cần cố gắng :

– Không ngừng nắm vững và làm phong phú kiến thức của mình một cách hệ thống, hoàn chỉnh.

– Tích cực đắm mình vào hoạt động sáng tạo.

– Cố rèn luyện một phẩm chất tâm lý tốt đẹp đó là dũng cảm, tự tin, ý chí kiên cường kết hợp với đầu óc biến hóa linh hoạt.